PLAN WYNIKOWY

(zakres podstawowy)

klasa 2.

Wstęp

Plan wynikowy kształcenia matematycznego jest dostosowany do programu nauczania matematyki w liceach i technikach – zakres podstawowy, autorstwa Marcina Kurczaba, Elżbiety Kurczab i Elżbiety Świdy, zamieszczonego na stronie internetowej www.pazdro.com.pl wiosną 2012 roku. Jest on przeznaczony dla nauczycieli oraz uczniów pracujących z podręcznikiem „Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Zakres podstawowy" – numer ewidencyjny w wykazie podręczników: 412/2/2012 oraz zbiorami zadań do matematyki, autorstwa Elżbiety Kurczab, Marcina Kurczaba i Elżbiety Świdy, wydanymi przez Oficynę Edukacyjną * Krzysztof Pazdro.

Plan jest wykazem wiadomości i umiejętności, jakie powinien mieć uczeń ubiegający się o określone oceny na poszczególnych etapach edukacji w liceum lub w technikum.

Wymagania stawiane przed uczniem podzieliliśmy na trzy grupy:

- Wymagania podstawowe (zawierają wymagania konieczne);
- Wymagania dopełniające (zawierają wymagania rozszerzające);
- Wymagania wykraczające.

Wymagania wykraczające zawierają w sobie wymagania dopełniające, te zaś zawierają wymagania podstawowe.

Ocenę dopuszczającą powinien otrzymać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące 40–60% wymagań podstawowych, zaś ocenę dostateczną – uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące powyżej 60% wymagań podstawowych.

Ocenę dobrą powinien otrzymać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące do 75% wymagań dopełniających, zaś ocenę bardzo dobrą – uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące powyżej 75% wymagań dopełniających.

Ocenę celującą powinien uzyskać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności zawarte w wymaganiach wykraczających.

Aby ułatwić nauczycielom, uczniom i ich rodzicom korzystanie z planu wynikowego, dla poszczególnych wymagań przedstawiamy przykładowe zadania, które dokładniej określają stopień trudności problemów wymaganych na poszczególne oceny. Przedstawione zadania **nie mogą** w żadnym wypadku stanowić przykładowego zbioru zadań, z którego nauczyciel powinien czerpać zadania na ewentualny egzamin sprawdzający, lecz mają jedynie wskazać stopień trudności zadań na poszczególne oceny.

Plan wynikowy nie może być „dokumentem sztywnym”. Zakładamy, że każdy nauczyciel zmodyfikuje ten plan, dostosowując go zarówno do liczby godzin przeznaczonych na realizację materiału, jak i do możliwości uczniów.

Nauczycieli, którzy będą korzystać z przygotowanego przez nas planu wynikowego, prosimy o wskazówki i uwagi.

Autorzy

Spis treści

1. Funkcja liniowa

Tematyka zajęć:

- Proporcjonalność prosta
- Funkcja liniowa. Wykres funkcji liniowej
- Miejsce zerowe funkcji liniowej. Własności funkcji liniowej
- Znaczenie współczynników we wzorze funkcji liniowej
- Równoległość i prostopadłość wykresów funkcji liniowych o współczynnikach kierunkowych różnych od zera
- Zastosowanie wiadomości o funkcji liniowej w zadaniach z życia codziennego
- Równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- Zastosowanie układów równań liniowych do rozwiązywania zadań tekstowych

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – wie, jaką zależność między dwiema wielkościami zmiennymi nazywamy proporcjonalnością prostą; potrafi wskazać współczynnik proporcjonalności; rozwiązuje zadania tekstowe z zastosowaniem proporcjonalności prostej; – zna pojęcie funkcji liniowej; – potrafi interpretować współczynniki we wzorze funkcji liniowej; – potrafi sporządzić wykres funkcji liniowej danej wzorem; – potrafi na podstawie wykresu funkcji liniowej (wzoru funkcji) określić monotoniczność funkcji; – potrafi wyznaczyć algebraicznie i graficznie zbiór	Uczeń: – potrafi przeprowadzić dowód warunku na prostopadłość wykresów funkcji liniowych o współczynnikach różnych od zera; – potrafi rozwiązywać zadania z wartością bezwzględną i parametrem dotyczące własności funkcji liniowej (o średnim stopniu trudności); – potrafi naszkicować wykres funkcji kawałkami liniowej i na jego podstawie omówić własności danej funkcji; – potrafi wyznaczyć algebraicznie miejsca zerowe funkcji kawałkami liniowej oraz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji i osi *OY*; – potrafi wyznaczyć algebraicznie zbiór tych argumentów, dla których funkcja kawałkami	Uczeń – rozwiązuje zadania nietypowe, o podwyższonym stopniu trudności.

tych argumentów, dla których funkcja liniowa przyjmuje wartości dodatnie (ujemne, niedodatnie, nieujemne); – potrafi sprawdzić algebraicznie, czy punkt o danych współrzędnych należy do wykresu funkcji liniowej; – potrafi podać własności funkcji liniowej na podstawie wykresu tej funkcji; – wie, że współczynnik kierunkowy *a* we wzorze funkcji $y = ax + b$, oznacza tangens kąta nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi *OX*; – wie, że współczynnik kierunkowy *a* we wzorze funkcji liniowej $y = ax + b$ wyraża się wzorem $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, gdzie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ są punktami należącymi do wykresu tej funkcji; – potrafi znaleźć wzór funkcji liniowej o zadanych własnościach (np. takiej, której wykres przechodzi przez dwa dane punkty; jest nachylony do osi *OX* pod danym kątem i przechodzi przez dany punkt itp.); – potrafi napisać wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie; – potrafi napisać wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez punkt o danych współrzędnych; – potrafi napisać wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez punkt	liniowa przyjmuje wartości dodatnie (ujemne); – potrafi obliczyć wartość funkcji kawałkami liniowej dla podanego argumentu; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności liniowe z wartością bezwzględną (o średnim stopniu trudności) i interpretować je graficznie; – potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania liniowego z parametrem; – potrafi wyznaczyć wszystkie wartości parametru, dla których zbiorem rozwiązań nierówności liniowej z parametrem jest podany zbiór.	

o danych współrzędnych; – na podstawie wzorów dwóch funkcji liniowych potrafi określić wzajemne położenie ich wykresów; – potrafi rozwiązywać proste zadania z parametrem dotyczące własności funkcji liniowej: – potrafi stosować wiadomości o funkcji liniowej do opisu zjawisk z życia codziennego (podać opis matematyczny zjawiska w postaci wzoru funkcji liniowej, odczytać informacje z wykresu (wzoru), zinterpretować je, przeanalizować i przetworzyć); – potrafi rozwiązać równanie liniowe z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązać nierówność liniową z jedną niewiadomą i przedstawić jej zbiór rozwiązań na osi liczbowej; – potrafi rozwiązać układ nierówności liniowych z jedną niewiadomą; – potrafi interpretować graficznie równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązywać algebraicznie proste równania i nierówności liniowe z wartością bezwzględną i interpretować je graficznie np.: $\lvert x-2\rvert=3$, $\lvert x+4\rvert>2$; – zna pojęcia równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi; – wie, że wykresem równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi jest prosta;		

– zna pojęcie układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi; – potrafi rozpoznać układ oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny i umie podać ich interpretację geometryczną; – potrafi rozwiązywać algebraicznie (metodą przez podstawienie oraz metodą przeciwnych współczynników) układy dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi; – potrafi graficznie rozwiązać układy dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Napisz wzór funkcji liniowej do wykresu, której należą punkty $A(1, 4)$ i $B(-10, 26)$. Naszkicuj wykres tej funkcji i omów jej własności <u>Zadanie 2.</u> a) Napisz wzór funkcji liniowej f, wiedząc, że jej wykres przechodzi przez punkt $A(-\sqrt{3}, -2)$ i jest nachylony do osi OX pod kątem $60°$. b) Napisz wzór funkcji liniowej g, której miejscem zerowym jest liczba 4 i której wykres jest prostopadły do wykresu funkcji f.	<u>Zadanie 1.</u> Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ -x & \text{dla } x \in \langle -1, 1 \rangle \\ x-2 & \text{dla } x \in (1, +\infty) \end{cases}$. a) Oblicz miejsca zerowe funkcji f oraz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f i osi OY. b) Wyznacz algebraicznie zbiór tych argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne. c) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu 6.	<u>Zadanie 1.</u> Wyznacz wzór funkcji liniowej f, która dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ spełnia warunek: $f(2x - 1) = -6x + 4$. <u>Zadanie 2.</u> Funkcję $y = \text{sgn}(a)$ (co oznacza: znak liczby a), definiujemy następująco: $\text{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & \text{dla } a > 0 \\ 0 & \text{dla } a = 0 \\ -1 & \text{dla } a < 0 \end{cases}$ Na podstawie powyższej definicji naszkicuj wykres funkcji: $f(x) = -2\text{sgn}(-3x + 1) + 5$.

<u>Zadanie 3.</u> Funkcję liniową g opisuje wzór $g(x) = -3x + 4 + 2m$. Wyznacz wartości parametru m, dla których miejscem zerowym funkcji g jest liczba mniejsza od 9. <u>Zadanie 4.</u> Właściciel sklepu z farbami zaopatruje się w odległej o 120 km fabryce farb i lakierów lub w położonej 10 km od sklepu hurtowni. W hurtowni za puszkę farby sklepikarz płaci 26 zł, zaś w fabryce taka sama puszka farby jest o 20% tańsza. Sklepikarz przywozi towar własnym samochodem, który pali średnio 8 litrów benzyny na 100 km. Litr benzyny kosztuje 5zł. Napisz wzór funkcji, która opisuje całkowity koszt zakupu farb, wraz z kosztami transportu, w przypadku zakupów w hurtowni ($y = h(x)$), jak i w fabryce ($y = f(x)$), gdzie x oznacza liczbę puszek farby. <u>Zadanie 5.</u> Rozwiąż nierówność: $\sqrt{5}\,x > 4x - 1$. <u>Zadanie 6.</u> Przed 10 laty ojciec był dziesięć razy starszy od syna. Za 11 lat będą mieć razem 75 lat. Ile lat ma	d) Naszkicuj wykres funkcji $y = f(x)$ i na jego podstawie naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$; omów własności funkcji $y = g(x)$. <u>Zadanie 2.</u> Wyznacz zbiór tych wartości parametru m, dla których funkcja liniowa $f(x) = (\|m - 3\| - 5)x - m + 10$ jest rosnąca i jednocześnie wykres tej funkcji przecina oś OY powyżej punktu $(0, 8)$. <u>Zadanie 3.</u> Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których zbiorem rozwiązań nierówności liniowej $(4 - k^2)x + 1 + k > 0$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.	

obecnie każdy z nich? <u>Zadanie 7.</u> Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań $3x + y = 6$ i $5x + 2y = 8$.		

2. Funkcja kwadratowa

Tematyka zajęć:

- Własności funkcji kwadratowej $y = ax^2$
- Wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej
- Związek między wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej a wzorem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej
- Miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej
- Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowych. Odczytywanie własności funkcji kwadratowej na podstawie wykresu
- Najmniejsza oraz największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym
- Badanie funkcji kwadratowej – zadania optymalizacyjne
- Równania kwadratowe
- Nierówności kwadratowe
- Zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi naszkicować wykres funkcji kwadratowej określonej wzorem $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$, oraz omówić jej własności na podstawie wykresu; – zna wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$; – zna wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej $y = a \cdot (x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$; – zna wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej $y = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $a \neq 0$; – zna wzory pozwalające obliczyć: wyróżnik	Uczeń: – potrafi rozwiązywać równania, które można sprowadzić do równań kwadratowych; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą (w tym zadania geometryczne); – potrafi zastosować własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych; – potrafi rozwiązywać zadania z parametrem,	Uczeń – potrafi wyprowadzić wzory na miejsca zerowe funkcji kwadratowej; – potrafi wyprowadzić wzory na współrzędne wierzchołka paraboli; – potrafi rozwiązywać różne problemy dotyczące funkcji kwadratowej, które wymagają niestandardowych metod pracy oraz niekonwencjonalnych pomysłów.

funkcji kwadratowej, współrzędne wierzchołka paraboli, miejsca zerowe funkcji kwadratowej (o ile istnieją); – potrafi obliczyć miejsca zerowe funkcji kwadratowej lub uzasadnić, że funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych; – potrafi obliczyć współrzędne wierzchołka paraboli na podstawie poznanego wzoru oraz na podstawie znajomości miejsc zerowych funkcji kwadratowej; – potrafi sprawnie zamieniać jedną postać wzoru funkcji kwadratowej na drugą (wzór funkcji w postaci ogólnej, kanonicznej, iloczynowej); – interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej (wzór funkcji w postaci ogólnej, kanonicznej, iloczynowej); – potrafi podać niektóre własności funkcji kwadratowej (bez szkicowania jej wykresu) na podstawie wzoru funkcji w postaci kanonicznej (przedziały monotoniczności funkcji, równanie osi symetrii paraboli, zbiór wartości funkcji) oraz na podstawie wzoru funkcji w postaci iloczynowej (miejsca zerowe funkcji, zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie lub ujemne); – potrafi naszkicować wykres dowolnej funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru; – potrafi na podstawie wykresu funkcji kwadratowej omówić jej własności; – potrafi napisać wzór funkcji kwadratowej na	o średnim stopniu trudności, dotyczące własności funkcji kwadratowej; – potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie dotyczące własności funkcji kwadratowej.	

podstawie informacji o jej wykresie; – potrafi napisać wzór funkcji kwadratowej o zadanych własnościach; – potrafi przekształcić wykres funkcji kwadratowej (symetria względem osi *OX*, symetria względem osi *OY*, symetria względem punktu *O*(0, 0), przesunięcie równoległe o wektor) oraz napisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w danym przekształceniu; – potrafi wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość funkcji kwadratowej w danym przedziale domkniętym; – potrafi algebraicznie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą; – potrafi graficznie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązywać proste zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązywać proste zadania z parametrem dotyczące własności funkcji kwadratowej; – potrafi przeanalizować zjawisko z życia codziennego, opisane wzorem (wykresem) funkcji kwadratowej.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Dana jest funkcja kwadratowa w postaci iloczynowej $f(x) = -2(x-3)(x+2)$, $x \in \boldsymbol{R}$.	Zadanie 1. Rozwiąż równanie $8\sqrt[3]{x^2} + 7\sqrt[3]{x} - 1 = 0$	Zadanie 1. Wiadomo, że miejscami zerowymi funkcji $f(x) = 3x^2 + bx + 15$ są liczby

a) Napisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej oraz ogólnej.
b) Naszkicuj wykres funkcji f.
c) Określ zbiór wartości funkcji f, przedziały monotoniczności oraz zbiór tych argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie.

Zadanie 2.
Dana jest funkcja kwadratowa określona wzorem
$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 8$, $x \in \boldsymbol{R}$.
a) Wyznacz miejsca zerowe funkcji f.
b) Rozwiąż nierówność $f(x) > -8$.
c) Wyznacz największą oraz najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle 1, 3 \rangle$.

Zadanie 3.
Napisz wzór funkcji kwadratowej, jeśli wiadomo, że do jej wykresu należy punkt $A(1, 3)$ i dla argumentu 2 funkcja przyjmuje swą największą wartość równą 4.

Zadanie 4.
Liczbę osób zwiedzających wystawę n-tego dnia od momentu jej otwarcia opisuje wzór:
$W(n) = -4n^2 + 48n - 24$, gdzie $n \in \{1, 2, ..., 11\}$.
Odpowiedz na pytania:
a) W którym dniu wystawę odwiedziło najwięcej osób?

Zadanie 2.
Wyznacz wszystkie wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$), przy których funkcja określona wzorem
$$f(x) = (m - 1)x^2 + \sqrt{2}\,x + m$$
jest funkcją kwadratową i przyjmuje wartości dodatnie, dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$.

Zadanie 3.
Suma cyfr liczby trzycyfrowej wynosi 8, zaś suma kwadratów jej cyfr jest równa 30. Jeśli w liczbie zamienimy cyfry skrajne, to otrzymana liczba będzie o 396 większa od początkowej. Znajdź tę liczbę.

Zadanie 4.
Wykaż, że funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = ax^2 + (a + c)x + c$, gdzie a i c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$, ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

Zadanie 5.
Firma zajmująca się wynajmem lokali ma do dyspozycji 180 pomieszczeń użytkowych. Wszystkie pomieszczenia są zajęte wówczas, gdy koszt wynajmu lokalu za jeden miesiąc wynosi 1200 zł. Firma oszacowała, że każda kolejna podwyżka czynszu o 40 zł zmniejsza o 5 liczbę wynajmowanych pomieszczeń.
a) Zapisz wzorem przychód firmy w zależności od

całkowite. Oblicz b.

b) Ile osób odwiedziło wystawę podczas jej trwania? <u>Zadanie 5.</u> Naszkicuj wykres funkcji $y = 2x^2$, $x \in \boldsymbol{R}$, a następnie przesuń go o wektor $\vec{u} = [-4, 2]$; otrzymany wykres przekształć przez symetrię względem punktu (0, 0). Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymałeś. Omów własności otrzymanej funkcji. <u>Zadanie 6.</u> Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx - 3$, $x \in \boldsymbol{R}$. a) Wyznacz b tak, aby najmniejsza wartość funkcji wynosiła (–4). b) Wyznacz b tak, aby największy zbiór, w którym funkcja jest malejąca, był równy przedziałowi $(-\infty, 6\rangle$. c) Wyznacz b tak, aby wierzchołek paraboli, która jest wykresem tej funkcji, należał do prostej o równaniu $y = 2x$.	liczby podwyżek czynszu, z których każda wyniosła 40 zł. b) Jaki miesięczny koszt wynajmu powinna ustalić firma, aby jej przychód był maksymalny? Ile wynosi maksymalny przychód?	

3. Geometria płaska – czworokąty

Tematyka zajęć:

- Podział czworokątów. Trapezoidy
- Trapezy
- Równoległoboki
- Wielokąty – podstawowe własności
- Podobieństwo. Figury podobne
- Podobieństwo czworokątów

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna podział czworokątów; – potrafi wyróżnić wśród trapezów: trapezy prostokątne i trapezy równoramienne; poprawnie posługuje się takimi określeniami, jak: podstawa, ramię, wysokość trapezu; – wie, że suma kątów przy każdym ramieniu trapezu jest równa 180° i umie tę własność wykorzystać w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trapezu i umie zastosować je w rozwiązywaniu prostych zadań; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące własności trapezów; – zna podstawowe własności równoległoboków i umie je stosować w rozwiązywaniu prostych zadań; – wie, jakie własności ma romb;	Uczeń: – umie na podstawie własności czworokąta podanych w zadaniu wywnioskować, jaki to jest czworokąt; – umie udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trapezu; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące czworokątów, w tym trapezów i równoległoboków; – potrafi uzasadnić, że suma miar kątów zewnętrznych wielokąta wypukłego jest stała i wynosi 720°.	Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące czworokątów.

– zna własności prostokąta i kwadratu; – wie, co to są trapezoidy, potrafi podać przykłady takich figur; – wie, czym charakteryzuje się deltoid; – rozwiązując zadania dotyczące czworokątów, korzysta z wcześniej poznanych twierdzeń, takich jak twierdzenie Pitagorasa oraz twierdzenie Talesa, wykorzystuje wiedzę na temat trójkątów, stosuje również wiadomości z trygonometrii; – zna i potrafi stosować wzór na liczbę przekątnych wielokąta wypukłego; – zna i potrafi stosować w zadaniach wzór na sumę miar kątów wewnętrznych wielokąta wypukłego; – wie, co to jest kąt zewnętrzny wielokąta wypukłego i ile wynosi suma miar wszystkich kątów zewnętrznych wielokąta wypukłego; – wie, jaki wielokąt jest wielokątem foremnym; – zna i rozumie definicję podobieństwa; – potrafi wskazać figury podobne; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące podobieństwa czworokątów.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Różnica miar kątów przeciwległych trapezu równoramiennego wynosi 20°. Oblicz miary kątów trapezu.	Zadanie 1. Udowodnij, że w dowolnym czworokącie odcinki łączące środki przeciwległych boków dzielą się w punkcie przecięcia na połowy	Zadanie 1. Uzasadnij, że odcinek łączący środki przekątnych dowolnego trapezu jest równoległy do podstaw i jego długość jest równa połowie różnicy długości podstaw.

<u>Zadanie 2.</u> Z kawałka materiału w kształcie trapezu prostokątnego o podstawach długości 1,2 m i 0,4 m oraz wysokości 1,5 m wycięto chorągiewkę w kształcie trójkąta równoramiennego, którego podstawą jest dłuższe ramię trapezu, a jeden z wierzchołków należy do krótszego ramienia trapezu. a) Wyznacz długości odcinków, na jakie ten wierzchołek podzielił krótsze ramię trapezu. b) Oblicz długości boków chorągiewki. Wyniki podaj z dokładnością do 0,01 m. <u>Zadanie 3.</u> Skwer ma kształt rombu o boku mającym długość 65 m. Wzdłuż przekątnych rombu biegną alejki spacerowe, z których jedna jest o 70 m dłuższa od drugiej. Oblicz długość tych alejek. <u>Zadanie 4.</u> W jakim wielokącie wypukłym liczba przekątnych jest 5 razy większa od liczby wierzchołków?	<u>Zadanie 2.</u> W czworokącie *ABCD* połączono środki boków i otrzymano prostokąt. Czy można twierdzić, że *ABCD* jest rombem? Odpowiedź uzasadnij. <u>Zadanie 3.</u> Wykaż, że: a) jeśli przekątne prostokąta zawierają się w dwusiecznych jego kątów, to prostokąt jest kwadratem b) jeśli przekątne rombu mają równą długość, to romb jest kwadratem.	

4. Geometria płaska – pole czworokąta

Tematyka zajęć:

- Pole prostokąta. Pole kwadratu
- Pole równoległoboku. Pole rombu
- Pole trapezu
- Pole czworokąta – zadania różne
- Pola figur podobnych
- Mapa. Skala mapy

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
– zna wzory na pola czworokątów, takich jak: kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok oraz trapez i potrafi je stosować w prostych zadaniach, korzystając z wcześniej zdobytej wiedzy (w tym także z trygonometrii); – zna i potrafi stosować w prostych zadaniach zależność między skalą podobieństwa czworokątów a polami tych czworokątów; – potrafi rozwiązywać proste zadania z zastosowaniem skali mapy.	– wie, jak obliczyć pole czworokąta, jeśli dane są długości jego przekątnych i miara kąta, pod jakim przecinają się te przekątne; – potrafi rozwiązywać zadania dotyczące pól czworokątów o średnim stopniu trudności.	– potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące pól czworokątów.

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Wysokości równoległoboku pozostają w stosunku 3 : 5, a jeden bok jest o 6 cm dłuższy od drugiego. a) oblicz obwód równoległoboku;	<u>Zadanie 1.</u> Różnica pól dwóch kwadratów jest równa 27. Oblicz długość boków kwadratów, wiedząc, że są one liczbami naturalnymi.	<u>Zadanie 1.</u> Pola trójkątów, których podstawami są podstawy trapezu, a wspólnym wierzchołkiem jest punkt przecięcia

b) wiedząc dodatkowo, że sinus kąta ostrego równoległoboku jest równy $\frac{\sqrt{5}}{3}$, oblicz pole równoległoboku i jego wysokości. <u>Zadanie 2.</u> Pole trapezu jest równe 21 cm^2, a wysokość jest równa 7 cm. Oblicz długości podstaw trapezu, jeśli jedna z nich jest o 3 cm dłuższa od drugiej. <u>Zadanie 3.</u> Pole kwadratu $A_1B_1C_1D_1$ jest o 69% większe od pola kwadratu $ABCD$. Oblicz skalę podobieństwa tych kwadratów.	<u>Zadanie 2.</u> Oblicz pole równoległoboku, którego przekątne długości 13 cm i 8 cm przecinają się pod kątem $120°$. <u>Zadanie 3.</u> Przekątne rombu mają długość 10 cm i 24 cm. Oblicz sinus kąta ostrego tego rombu i na tej podstawie ustal, czy kąt ostry rombu ma miarę większą od $45°$, czy mniejszą.	się przekątnych tego trapezu, wynoszą P_1 i P_2. Oblicz pole trapezu.

5. Wielomiany

Tematyka zajęć:

- Wielomiany jednej zmiennej rzeczywistej
- Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów
- Rozkładanie wielomianów na czynniki
- Równania wielomianowe
- Zadania prowadzące do równań wielomianowych

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna pojęcie jednomianu jednej zmiennej i potrafi określić stopień tego jednomianu; – potrafi wskazać jednomiany podobne; – potrafi rozpoznać wielomian jednej zmiennej rzeczywistej; – potrafi uporządkować wielomian (malejąco lub rosnąco); – potrafi określić stopień wielomianu jednej zmiennej; – potrafi obliczyć wartość wielomianu dla danej wartości zmiennej; – potrafi wykonać dodawanie, odejmowanie, mnożenie wielomianów; – potrafi sprawdzić, czy podana liczba jest pierwiastkiem wielomianu; – potrafi rozłożyć wielomian na czynniki poprzez wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias,	Uczeń: – potrafi rozwiązywać równania wielomianowe, które można sprowadzić do równań kwadratowych przez odpowiednie podstawienie; – potrafi rozwiązywać zadania o wielomianach o średnim stopniu trudności; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań wielomianowych.	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania dotyczące wielomianów wymagające niekonwencjonalnych metod lub pomysłów, a także zadania o podwyższonym stopniu trudności z zastosowaniem poznanej wiedzy.

zastosowanie wzorów skróconego mnożenia: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ oraz zastosowanie metody grupowania wyrazów; – potrafi rozwiązywać równania wielomianowe, które wymagają umiejętności rozkładania wielomianów na czynniki wymienionych w poprzednim punkcie; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące własności wielomianów, w których występują parametry.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Określ stopień jednomianu $F(x) = 3(x^7)^3 \cdot (x^4)^5$. <u>Zadanie 2.</u> Oblicz wartość wielomianu $W(x) = x^2 - 2x$ dla $x = \sqrt{2} - 1$. <u>Zadanie 3.</u> Dane są wielomiany: $W(x) = 2x^3 - 3x + 1$ oraz $P(x) = 4x^2 - x + 5$. Wykonaj działania: a) $W(x) - 2P(x)$; b) $W(x) + [P(x)]^2$.	<u>Zadanie 1.</u> Rozwiąż równania: a) $2x^4 - x^2 - 1 = 0$ b) $8x^6 - 65x^3 + 8 = 0$. <u>Zadanie 2.</u> Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + (2a^3 - 6a^2)x^2 + 9a - 28$, którego suma współczynników wynosi zero. a) Wyznacz a. b) Dla znalezionej wartości a rozwiąż równanie $W(x) = 0$.	<u>Zadanie 1.</u> Rozłóż na czynniki wyrażenie $(ab + ac + bc)(a + b + c) - abc$. <u>Zadanie 2.</u> Rozłóż na czynniki, możliwie najniższego stopnia, wielomian $W(x) = 9x^4 + 9$.

<u>Zadanie 4.</u> a) Rozłóż wielomian $W(x) = -2x^3 + 8x - x^2 + 4$ na czynniki liniowe. b) Wypisz pierwiastki tego wielomianu. <u>Zadanie 5.</u> Dany jest wielomian $W(x) = 3x^3 - 2x^2 + kx$. a) Wyznacz k tak, aby pierwiastkiem tego wielomianu była liczba 1. b) Dla wyznaczonej wartości k wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu. <u>Zadanie 6.</u> Rozwiąż równanie $(2x - 3)(x^2 - 1) = (5x + 6)(x^2 - 1)$.	<u>Zadanie 3.</u> Iloczyn trzech kolejnych liczb nieparzystych jest o 65 większy od różnicy kwadratów liczby największej i najmniejszej. Znajdź te liczby.	

6. Ułamki algebraiczne. Równania wymierne

Tematyka zajęć:

- Ułamek algebraiczny. Skracanie i rozszerzanie ułamków algebraicznych
- Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych
- Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych
- Proste równania wymierne
- Zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych
- Wykres i własności funkcji $y = \frac{a}{x}$
- Proporcjonalność odwrotna

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi określić dziedzinę ułamka algebraicznego; – potrafi napisać ułamek algebraiczny o zadanej dziedzinie; – potrafi wykonywać działania na ułamkach algebraicznych, takie jak: skracanie ułamków, rozszerzanie ułamków, dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych; – potrafi rozwiązywać proste równania wymierne; – potrafi narysować wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \in \mathbf{R} - \{0\}$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$;	Uczeń: – zna definicję funkcji homograficznej $f(x) = \frac{a}{x-p} + q$, gdzie $a \neq 0$ – potrafi przekształcić wzór funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, gdzie $x \neq -c$, tak by znany był wzór funkcji $y = \frac{a}{x}$ i współrzędne wektora przesunięcia równoległego; – potrafi narysować wykres funkcji $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, gdzie $x \neq -c$; – potrafi opisać własności funkcji homograficznej	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące wyrażeń wymiernych.

– potrafi opisać własności funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \in \boldsymbol{R} - \{0\}$, $x \in \boldsymbol{R} - \{0\}$; – wie, jaką zależność pomiędzy dwiema wielkościami zmiennymi nazywamy proporcjonalnością odwrotną; – potrafi wskazać współczynnik proporcjonalności odwrotnej; – potrafi rozwiązywać proste zadania tekstowe z zastosowaniem wiadomości o proporcjonalności odwrotnej.	$f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, gdzie $x \neq -c$, na podstawie jej wykresu; – potrafi obliczyć miejsce zerowe funkcji homograficznej oraz współrzędne punktu, w którym wykres przecina oś *OY*; – potrafi wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji homograficznej; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności związane z funkcją homograficzną; – potrafi przekształcić wykres funkcji homograficznej w symetrii względem osi *OX*, symetrii względem osi *OY*, symetrii względem punktu (0, 0), w przesunięciu równoległym o dany wektor oraz napisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku tego przekształcenia; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych.	

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> a) Wyznacz te wartości *x*, dla których podane ułamki algebraiczne mają sens liczbowy: $\frac{x+2}{x-3}$, $\frac{x^2+1}{x^2+2x+1}$, $\frac{x}{x^3-4x^2+2x-8}$ b) Podaj przykład ułamka algebraicznego, którego dziedziną jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{2, 3, 7\}$.	<u>Zadanie 1.</u> Wykres funkcji homograficznej o wzorze $f(x) = \frac{2x-3}{x+2}$ otrzymamy w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = \frac{a}{x}$ o pewien wektor.	<u>Zadanie 1.</u> Z równania $\frac{1}{y-1} - \frac{1}{x+1} = 1$ wyznacz *y* jako funkcję zmiennej *x*. Następnie naszkicuj wykres tej funkcji i omów jej własności.

Zadanie 2.

a) Skróć ułamki algebraiczne: $\frac{2x^4-4x^2}{8x^2}$ oraz $\frac{(2x-1)(x+4)}{4x^2-1}$;
podaj konieczne założenia.

b) Wykonaj dodawanie oraz odejmowanie ułamków algebraicznych:
$\frac{x}{x-2}+\frac{2x+3}{x+4}$ oraz $\frac{x-5}{2x+3}-\frac{3}{4x^2-9}$;
podaj konieczne założenia.

c) Wykonaj mnożenie oraz dzielenie wyrażeń wymiernych: $\frac{x^2-4}{2x^2-x}\cdot\frac{2x-1}{5x+10}$ oraz $\frac{x^2+4x+4}{x^2-16}:\frac{x+2}{2x-8}$; podaj konieczne założenia.

Zadanie 3.

Dana jest funkcja o wzorze $f(x)=\frac{2}{x}$, gdzie $x\in \boldsymbol{R}-\{0\}$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f i na jego podstawie omów własności funkcji.
b) Dla jakiego argumentu wartość funkcji f wynosi 22?
c) Wyznacz wartość funkcji f dla argumentu 100.
d) Sprawdź, czy do wykresu funkcji f należy punkt

a) Wyznacz wzór funkcji $y=\frac{a}{x}$ oraz współrzędne wektora przesunięcia.
b) Oblicz miejsce zerowe funkcji f oraz współrzędne punktu, w którym wykres funkcji przecina oś OY.
c) Naszkicuj wykres funkcji f.
d) Podaj przedziały monotoniczności funkcji f.

Zadanie 3.

Dwie sekretarki wykonały pewną pracę w ciągu 12 godzin. Gdyby pierwsza wykonała sama połowę pracy, a następnie druga resztę, to zużyłaby na to 25 godzin. W ciągu ilu godzin każda z sekretarek, pracując oddzielnie, może wykonać tę pracę?

Zadanie 3.

Rozwiąż równania:

a) $\frac{x+2}{x+3}+\frac{x}{x-2}=\frac{10}{x^2+x-6}$

b) $\frac{x}{x^2+6x+9}=\frac{1}{x+3}$.

o współrzędnych $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}, \sqrt{3}+1\right)$. <u>Zadanie 4.</u> Rozwiąż równanie $\frac{2x-3}{x+5}=\frac{x-5}{x+2}$. <u>Zadanie 5.</u> Promień dużego koła bicyklu ma długość 54 cm, a promień małego kółka – 20 cm. Oblicz, ile obrotów wykonało małe kółko, jeśli w tym samym czasie duże koło obróciło się 50 razy. Jaką odległość pokonał wtedy bicykl?		

7. Ciągi

Tematyka zajęć:

- Określenie ciągu. Sposoby opisywania ciągów
- Monotoniczność ciągów
- Ciąg arytmetyczny
- Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
- Ciąg geometryczny
- Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego
- Lokaty pieniężne i kredyty bankowe

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna definicję ciągu (ciągu liczbowego); – potrafi wyznaczyć dowolny wyraz ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym; – potrafi narysować wykres ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym; – potrafi podać własności ciągu liczbowego na podstawie jego wykresu; – zna definicję ciągu arytmetycznego; – zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego; – zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań wzór na sumę *n* kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; – zna definicję ciągu geometrycznego; – zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań wzór na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego;	Uczeń: – potrafi wypisać kilka kolejnych wyrazów ciągu danego wzorem rekurencyjnym; – potrafi sprawdzić, które wyrazy ciągu należą do danego przedziału; – potrafi zbadać na podstawie definicji monotoniczność ciągu określonego wzorem ogólnym; – potrafi zbadać na podstawie definicji, czy dany ciąg określony wzorem ogólnym jest arytmetyczny; – potrafi zbadać na podstawie definicji, czy dany ciąg określony wzorem ogólnym jest geometryczny; – potrafi wykorzystać średnią arytmetyczną do obliczenia wyrazu środkowego ciągu arytmetycznego; – potrafi wykorzystać średnią geometryczną do	Uczeń: – uczeń potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie dotyczące ciągów i ich własności; – potrafi udowodnić wzór na sumę *n* kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; – potrafi udowodnić wzór na sumę *n* kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

– zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań wzór na sumę *n* kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego; – potrafi wyznaczyć pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego na podstawie informacji o innych wyrazach ciągu; – potrafi znaleźć wzór na wyraz ogólny ciągu arytmetycznego; – potrafi wyznaczyć pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego na podstawie informacji o wartościach innych wyrazów ciągu; – potrafi znaleźć wzór na wyraz ogólny ciągu geometrycznego; – potrafi rozwiązywać zadania z życia codziennego dotyczące ciągu arytmetycznego i geometrycznego; – potrafi stosować procent prosty i składany w zadaniach dotyczących oprocentowania lokat i kredytów.	obliczenia wyrazu środkowego ciągu geometrycznego; – potrafi rozwiązywać różne zadania dotyczące ciągu arytmetycznego lub ciągu geometrycznego, które wymagają rozwiązania układów równań o podwyższonym stopniu trudności; – potrafi rozwiązywać zadania mieszane dotyczące ciągu arytmetycznego i geometrycznego.	

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = 4 - \frac{2}{n}$. a) Wypisz sześć początkowych wyrazów ciągu. b) Narysuj wykres tego ciągu. c) Czy ciąg jest ciągiem rosnącym? Odpowiedź uzasadnij. d) Zbadaj, czy istnieje taki wyraz ciągu, który jest	<u>Zadanie 1.</u> Dla jakich x liczby $2x^3 + 9x$, $x^2 + x$, $-3x - 4$ są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n)? Dla znalezionej wartości x napisz wzór ogólny ciągu (a_n) i zbadaj na podstawie definicji jego monotoniczność.	<u>Zadanie 1.</u> Udowodnij, że trzy liczby a, b, c tworzące ciąg geometryczny spełniają warunek: $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$. <u>Zadanie 2.</u> Wykaż, że jeśli S_n, S_{2n}, S_{3n} oznaczają

równy $\frac{15}{4}$. Zadanie 2. Maszynistka miała do przepisania książkę liczącą 586 stron. Przez pierwsze 3 dni przepisywała po 14 stron dziennie. Aby jednak przyspieszyć przepisywanie całości, postanowiła, że czwartego dnia przepisze o 2 strony więcej niż trzeciego i każdego następnego dnia przepisze o 2 strony więcej niż poprzedniego. W ciągu ilu dni przepisała całą książkę? Zadanie 3. Piłka, odbijając się od ziemi, osiągnęła za każdym razem wysokość wynoszącą $\frac{2}{3}$ poprzedniej. Jak wysoko wzniosła się piłka po pierwszym uderzeniu, jeśli po szóstym odbiła się na wysokość 32 cm? Zadanie 4. Pan X umówił się z panem Y, że będzie mu wypłacał codziennie przez trzy tygodnie pieniądze, przy czym pierwszego dnia 10 zł, drugiego 20 zł, trzeciego 30 zł, czwartego 40 zł itd. W zamian pan Y wypłaci mu pierwszego dnia 1 grosz, drugiego 2 grosze, trzeciego 4 grosze, czwartego 8 groszy itd. Który z panów zyska na tej umowie i ile?	Zadanie 2. Za trzy książki, których ceny tworzą ciąg geometryczny, zapłacono 61 zł. Za pierwszą i drugą razem zapłacono o 11 zł więcej niż za trzecią. Ile zapłacono za trzecią książkę? Zadanie 3. Trzy liczby, których suma wynosi 15, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli do pierwszej z nich dodamy 2, do drugiej 3, a do trzeciej 8, to otrzymane liczby utworzą ciąg geometryczny. Znajdź te liczby. Zadanie 4. Rozwiąż równanie: $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + ... + (x + 28) = 155$, jeśli wiadomo, że po lewej stronie równania występuje suma wyrazów ciągu arytmetycznego.	odpowiednio sumę n, $2n$, $3n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), to $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$.

<u>Zadanie 5.</u> Pan Kowalczyk wpłacił 2500 zł na cztery lata na lokatę w banku. Jaką kwotę będzie miał na koncie po tym okresie, jeśli oprocentowanie lokaty wynosi 10% w skali roku, a odsetki kapitalizuje się co 6 miesięcy?		