PLAN WYNIKOWY

(zakres rozszerzony)

klasa 2.

Spis treści

1. Funkcja liniowa

Tematyka zajęć:

- Proporcjonalność prosta
- Funkcja liniowa. Wykres funkcji liniowej
- Miejsce zerowe funkcji liniowej. Własności funkcji liniowej
- Znaczenie współczynników we wzorze funkcji liniowej
- Równoległość i prostopadłość wykresów funkcji liniowych o współczynnikach kierunkowych różnych od zera
- Zastosowanie wiadomości o funkcji liniowej w zadaniach z życia codziennego
- Równanie liniowe i nierówność liniowa z jedną niewiadomą
- Równania i nierówności z wartością bezwzględną
- Równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi
- Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi z parametrem
- Zastosowanie układów równań liniowych do rozwiązywania zadań tekstowych
- Nierówność pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi i jej interpretacja geometryczna. Układy nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi
- Zastosowanie układów nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi do rozwiązywania zadań

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – wie, jaką zależność między dwiema wielkościami zmiennymi nazywamy proporcjonalnością prostą; – potrafi wskazać współczynnik proporcjonalności; – rozwiązuje zadania tekstowe z zastosowaniem proporcjonalności prostej; – zna pojęcie funkcji liniowej; – potrafi interpretować współczynniki we wzorze	Uczeń: – potrafi udowodnić, na podstawie definicji, niektóre własności funkcji liniowej, takie jak: monotoniczność, różnowartościowość itp.; – potrafi przeprowadzić dowód warunku na prostopadłość wykresów funkcji liniowych o współczynnikach różnych od zera; – potrafi rozwiązywać zadania z wartością bezwzględną i parametrem dotyczące własności	Uczeń: – rozwiązuje zadania nietypowe o podwyższonym stopniu trudności.

funkcji liniowej; – potrafi sporządzić wykres funkcji liniowej danej wzorem; – potrafi na podstawie wykresu funkcji liniowej (wzoru funkcji) określić monotoniczność funkcji; – potrafi wyznaczyć algebraicznie i graficznie zbiór tych argumentów, dla których funkcja liniowa przyjmuje wartości dodatnie (ujemne, niedodatnie, nieujemne); – potrafi sprawdzić algebraicznie, czy punkt o danych współrzędnych należy do wykresu funkcji liniowej; – potrafi podać własności funkcji liniowej na podstawie wykresu tej funkcji; – wie, że współczynnik kierunkowy *a* we wzorze funkcji $y = ax + b$ oznacza tangens kąta nachylenia wykresu funkcji liniowej do osi *OX*; – wie, że współczynnik kierunkowy *a* we wzorze funkcji liniowej $y = ax + b$ wyraża się wzorem $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, gdzie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ są punktami należącymi do wykresu tej funkcji; – potrafi znaleźć wzór funkcji liniowej o zadanych własnościach (np. takiej, której wykres przechodzi przez dwa dane punkty; jest nachylony do osi *OX* pod danym kątem i przechodzi przez dany punkt); – potrafi napisać wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie; – potrafi naszkicować wykres funkcji kawałkami	funkcji liniowej; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności liniowe z wartością bezwzględną i interpretować je graficznie; – potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania liniowego z parametrem (z dwoma parametrami); – potrafi wyznaczyć wszystkie wartości parametru, dla których zbiorem rozwiązań nierówności liniowej z parametrem, jest podany zbiór; – potrafi rozwiązywać układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi metodą wyznacznikową; – potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi z parametrem, stosując metodę wyznacznikową; – potrafi rozwiązać układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z wartością bezwzględną oraz zinterpretować go graficznie; – potrafi wykreślać w prostokątnym układzie współrzędnych zbiory punktów opisane równaniem, nierównością, układem równań lub układem nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi z wartością bezwzględną; – potrafi stosować wiedzę o układach nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi do rozwiązywania zadań („programowanie liniowe”).	

liniowej i na jego podstawie omówić własności danej funkcji; – potrafi wyznaczyć algebraicznie miejsca zerowe funkcji kawałkami liniowej oraz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji i osi *OY*; – potrafi wyznaczyć algebraicznie zbiór tych argumentów, dla których funkcja kawałkami liniowa przyjmuje wartości dodatnie (ujemne); – potrafi obliczyć wartość funkcji kawałkami liniowej dla podanego argumentu; – potrafi napisać wzór funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez punkt o danych współrzędnych; – potrafi napisać wzór funkcji liniowej, której wykres jest prostopadły do wykresu danej funkcji liniowej i przechodzi przez punkt o danych współrzędnych; – potrafi określić, na podstawie wzorów dwóch funkcji liniowych, wzajemne położenie ich wykresów; – potrafi stosować wiadomości o funkcji liniowej do opisu zjawisk z życia codziennego (podać opis matematyczny zjawiska w postaci wzoru funkcji liniowej, odczytać informacje z wykresu lub wzoru, zinterpretować je, przeanalizować i przetworzyć); – potrafi rozwiązać równanie liniowe z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązać nierówność liniową z jedną		

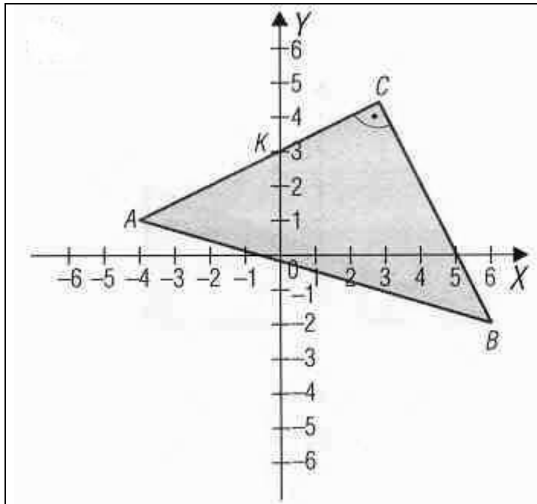
niewiadomą i przedstawić jej zbiór rozwiązań na osi liczbowej; – potrafi rozwiązać układ nierówności liniowych z jedną niewiadomą; – potrafi interpretować graficznie równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązywać algebraicznie proste równania i nierówności z wartością bezwzględną i interpretować je graficznie np. $\lvert\lvert x-2\rvert-1\rvert=3$, $\lvert x+4\rvert>2x+3$; – zna pojęcia równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi; – wie, że wykresem równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi jest prosta; – zna pojęcie układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi; – potrafi rozpoznać układ oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny i umie podać ich interpretację geometryczną; – potrafi rozwiązywać algebraicznie (metodą przez podstawienie oraz metodą przeciwnych współczynników) układy dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do układów równań liniowych; – zna pojęcie nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi i potrafi interpretować geometrycznie taką nierówność; – potrafi przedstawić na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych, zbiór		

tych wszystkich punktów, których współrzędne spełniają dany układ nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi; – potrafi opisać daną figurę geometryczną (np. kąt, trójkąt, czworokąt) przedstawioną w prostokątnym układzie współrzędnych, za pomocą odpowiedniego układu nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi;		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \begin{cases} x+2 \text{ dla } x \in (-\infty,-1) \\ -x \text{ dla } x \in \langle -1,1 \rangle \\ x-2 \text{ dla } x \in (1,+\infty) \end{cases}$. a) Oblicz miejsca zerowe funkcji f oraz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji f i osi OY. b) Wyznacz algebraicznie zbiór tych argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne. c) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu 6. d) Naszkicuj wykres funkcji $y = f(x)$ i na jego podstawie naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$; omów własności funkcji $y = g(x)$. Zadanie 2. a) Napisz wzór funkcji liniowej f, wiedząc, że jej	Zadanie 1. Wyznacz te wartości parametru m, dla których funkcja liniowa $f(x) = (\lvert m-3\rvert - 5)x - m + 10$ jest rosnąca i nieparzysta. Zadanie 2. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których zbiorem rozwiązań nierówności liniowej $(4 - k^2)x + 1 + k > 0$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Zadanie 3. Rozwiąż nierówność: $\sqrt{x^2+4x+4} - \lvert 2x-5\rvert \geq x + 7$. Zadanie 4. Dla jakich wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$) układ równań z niewiadomymi x i y	Zadanie 1. Wyznacz wzór funkcji liniowej f, która dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ spełnia warunek: $f(2x-1) = -6x + 4$. Zadanie 2. Funkcję $y = \mathrm{sgn}(a)$ (co oznacza znak liczby a), definiujemy następująco: $\mathrm{sgn}(a) = \begin{cases} 1 \text{ dla } a > 0 \\ 0 \text{ dla } a = 0 \\ -1 \text{ dla } a < 0 \end{cases}$ Na podstawie powyższej definicji naszkicuj wykres funkcji: $f(x) = -2\mathrm{sgn}(-3x+1) + 5$.

wykres przechodzi przez punkt $A(-\sqrt{3}, -2)$ i jest nachylony do osi OX pod kątem $120°$. b) Napisz wzór funkcji liniowej g, której miejscem zerowym jest liczba 4 i której wykres jest prostopadły do wykresu funkcji f. <u>Zadanie 3.</u> Rozwiąż nierówność $\sqrt{5}x > 4x - 1$. <u>Zadanie 4.</u> Klub sportowy przeznaczył na kupno 28 dresów kwotę w wysokości 2860 zł. Zamierza kupić dresy w dwóch gatunkach. Jaką liczbę dresów pierwszego gatunku może kupić ten klub, jeśli wiadomo, że dres pierwszego gatunku kosztuje 125 zł, a dres drugiego gatunku 80 zł? <u>Zadanie 5.</u> Opisz za pomocą układu nierówności zbiór przedstawiony na rysunku.	$\begin{cases} x - my = m \\ mx - y = 2 \end{cases}$ jest oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny? W przypadku istnienia rozwiązań, wyznacz je. <u>Zadanie 5.</u> Wyznacz zbiór tych punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają układ nierówności $\begin{cases} \lvert x \rvert - \lvert y \rvert \le 2 \\ \lvert x \rvert \le 4 \end{cases}$. <u>Zadanie 6.</u> Mały zakład włókienniczy produkuje dwa rodzaje swetrów (damskie i męskie) z dwóch rodzajów wełny (czarnej i białej). Do produkcji jednego swetra damskiego potrzeba 20 dag wełny czarnej i 40 dag wełny białej, a do produkcji swetra męskiego — 60 dag wełny czarnej i 20 dag wełny białej. Zasoby wełny czarnej wynoszą 120 kg, natomiast białej 140 kg. Zysk osiągany ze sprzedaży swetra męskiego wynosi 38 zł, a ze sprzedaży swetra dla pań — 44 zł. Ile i jakie swetry powinien wyprodukować ten zakład, aby osiągnąć jak największy zysk?	

 Dane: $A(-4,\ 1)$, $K(0,\ 3)$ $B(6,\ -2)$, $\lvert\sphericalangle ACB\rvert = 90°$		

2. Funkcja kwadratowa

Tematyka zajęć:

- Własności funkcji kwadratowej $y = ax^2$
- Wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej
- Związek między wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej a wzorem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej
- Miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej
- Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowych. Odczytywanie własności funkcji kwadratowej na podstawie wykresu
- Najmniejsza oraz największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym
- Badanie funkcji kwadratowej – zadania optymalizacyjne
- Równania kwadratowe
- Równania prowadzące do równań kwadratowych
- Nierówności kwadratowe
- * Równania i nierówności, w których niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka kwadratowego
- Zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych
- Wzory Viète'a
- Równania i nierówności kwadratowe z parametrem
- Wykres funkcji kwadratowej z wartością bezwzględną
- Równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną
- Równania kwadratowe z wartością bezwzględną i parametrem

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi naszkicować wykres funkcji kwadratowej określonej wzorem $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$, oraz omówić jej własności na podstawie wykresu; – zna wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania z parametrem o podwyższonym stopniu trudności dotyczące własności funkcji kwadratowej; – potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie	Uczeń – potrafi wyprowadzić wzory na miejsca zerowe funkcji kwadratowej; – potrafi wyprowadzić wzory na

$y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$; – zna wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej $y = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$; – zna wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie $a \neq 0$; – zna wzory pozwalające obliczyć: wyróżnik funkcji kwadratowej, współrzędne wierzchołka paraboli, miejsca zerowe funkcji kwadratowej (o ile istnieją); – potrafi obliczyć miejsca zerowe funkcji kwadratowej lub uzasadnić, że funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych; – potrafi obliczyć współrzędne wierzchołka paraboli na podstawie poznanego wzoru oraz na podstawie znajomości miejsc zerowych funkcji kwadratowej; – potrafi sprawnie zamieniać wzór funkcji kwadratowej (wzór w postaci kanonicznej na wzór w postaci ogólnej i odwrotnie, wzór w postaci iloczynowej na wzór w postaci kanonicznej itp.); – interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje); – potrafi podać niektóre własności funkcji kwadratowej (bez szkicowania jej wykresu) na podstawie wzoru funkcji w postaci kanonicznej (np. przedziały monotoniczności funkcji, równanie osi symetrii paraboli, zbiór wartości	dotyczące własności funkcji kwadratowej; – potrafi rozwiązywać równania kwadratowe z wartością bezwzględną i parametrem; – potrafi rozwiązywać zadania optymalizacyjne.	współrzędne wierzchołka paraboli; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności, w których niewiadoma występuje pod znakiem pierwiastka kwadratowego; – potrafi rozwiązywać różne problemy dotyczące funkcji kwadratowej, które wymagają niestandardowych metod pracy oraz niekonwencjonalnych pomysłów.

funkcji) oraz na podstawie wzoru funkcji w postaci iloczynowej (np. zbiór tych argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie czy ujemne); – potrafi naszkicować wykres dowolnej funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru; – potrafi na podstawie wykresu funkcji kwadratowej omówić jej własności; – potrafi napisać wzór funkcji kwadratowej o zadanych własnościach; – potrafi napisać wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o jej wykresie; – potrafi wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość funkcji kwadratowej w danym przedziale domkniętym; – potrafi zastosować własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania prostych zadania optymalizacyjnych; – potrafi algebraicznie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą; – potrafi graficznie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą; – potrafi rozwiązywać zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą (w tym także zadania geometryczne); – potrafi rozwiązywać równania z niewiadomą występującą pod znakiem pierwiastka stopnia parzystego, które można sprowadzić do równań kwadratowych;		

– potrafi rozwiązywać proste zadania z parametrem, w których jest mowa o własnościach funkcji kwadratowej; – potrafi przeanalizować zjawisko z życia codziennego opisane wzorem (wykresem) funkcji kwadratowej; – potrafi opisać dane zjawisko za pomocą wzoru funkcji kwadratowej; – zna wzory Viète'a i ich zastosowanie; – potrafi przekształcać wyrażenia, tak by można było obliczać ich wartości, stosując wzory Viète'a; – potrafi przekształcać wykresy funkcji kwadratowych, stosując poznane w klasie pierwszej przekształcenia, oraz napisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w danym przekształceniu; – potrafi szkicować wykres funkcji kwadratowej z wartością bezwzględną; – potrafi rozwiązywać proste równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną; – potrafi rozwiązywać proste równania i nierówności kwadratowe z parametrem.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Funkcja kwadratowa f dana jest wzorem w postaci	<u>Zadanie 1.</u> Zbadaj, na podstawie definicji, monotoniczność	<u>Zadanie 1.</u> Wyznacz równania kwadratowe

kanonicznej $f(x) = -2(x + 3)^2 + 8$.
Podaj wzór funkcji f w postaci iloczynowej i ogólnej.
Naszkicuj wykres funkcji f i na jego podstawie omów własności funkcji.

Zadanie 2.
Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 + bx + c$ jest malejąca w przedziale $(-\infty, 1\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 1, +\infty)$.
Wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji f należy do prostej k: $y = 4x - 8$.
a) Wyznacz współczynniki b oraz c.
b) Oblicz miejsca zerowe funkcji f.
c) Rozwiąż nierówność $f(x) \leq 4x - 8$.

Zadanie 3.
Wyznacz współczynniki b i c we wzorze funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$, wiedząc, że jej miejsca zerowe spełniają warunek:
$x_1 = 3$ i $x_1 + x_2 = 10$.

Zadanie 4.
Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x^2 - 4x|$ i na jego podstawie ustal liczbę rozwiązań równania
$|x^2 - 4x| = m$, gdzie m jest parametrem i $m \in \boldsymbol{R}$.

Zadanie 5.
Dla jakich wartości parametru k ($k \in \boldsymbol{R}$) zbiorem rozwiązań nierówności $(k^2 - 1)x^2 + (k + 1)x + 3 > 0$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?

funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 6x$,
w przedziale $(-\infty; 3)$.

Zadanie 2.
Dla jakich wartości parametru m miejsca zerowe x_1, x_2 funkcji f o wzorze
$f(x) = x^2 - 4(m + 1)x + 2m(m - 1)$
spełniają warunek $x_1 < m < x_2$?

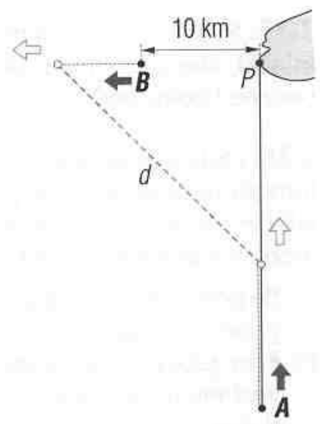
Zadanie 3.
Długości boków pewnego trójkąta są kolejnymi liczbami naturalnymi dodatnimi. Cosinus kąta leżącego pomiędzy dłuższymi bokami jest równy 0,75. Wyznacz długości boków tego trójkąta i oblicz jego pole.

Zadanie 4.
Wyznacz wszystkie wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$) tak, aby równanie
$x^2 - (m - 3) \cdot |x| + m = 0$ miało dwa różne rozwiązania.

Zadanie 5.
O godzinie 13^{00} statek B płynący na zachód ze stałą prędkością 20 km/h znajduje się w odległości 10 km od portu, zaś statek A płynący na północ ze stałą prędkością 40 km/h znajduje się w odległości od portu 6 razy większej niż statek B.

$ax^2 + bx + c = 0$ o współczynnikach całkowitych a, b, c, gdzie $a \in \boldsymbol{C} - \{0\}$, z których każde ma dwa różne rozwiązania: $x_1 = a$, $x_2 = b$.

Zadanie 2.
Rozwiąż nierówność
$\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} > \sqrt{2x-5}$.

<u>Zadanie 6.</u> Rozwiąż równanie $x^2 = 4\sqrt{x^2+1} - 5$. <u>Zadanie 7.</u> Drut mający długość 2 m podzielono na dwie części: z jednej zrobiono kwadratową ramkę, a z drugiej ramkę prostokątną, w której jeden bok prostokąta ma długość 3 razy większą od długości drugiego boku. Jak należy podzielić drut, aby suma pól kwadratu i prostokąta była najmniejsza?	 O której godzinie odległość między statkami będzie najmniejsza?	

3. Geometria płaska – czworokąty

Tematyka zajęć:

- Podział czworokątów. Trapezoidy
- Trapezy
- Równoległoboki
- Okrąg opisany na czworokącie
- Okrąg wpisany w czworokąt
- Okrąg opisany na czworokącie, okrąg wpisany w czworokąt – zadania na dowodzenie
- Podobieństwo. Figury podobne
- Podobieństwo czworokątów

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna podział czworokątów; – potrafi wyróżnić wśród trapezów: trapezy prostokątne i trapezy równoramienne; poprawnie posługuje się takimi określeniami, jak: podstawa, ramię, wysokość trapezu; – wie, że suma kątów przy każdym ramieniu trapezu jest równa 180° i umie tę własność wykorzystać w rozwiązywaniu prostych zadań; – zna twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trapezu i umie zastosować je w rozwiązywaniu prostych zadań; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące własności trapezów; – zna podstawowe własności równoległoboków i umie je stosować w rozwiązywaniu prostych	Uczeń: – umie na podstawie własności czworokąta podanych w zadaniu wywnioskować, jaki to jest czworokąt; – umie udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trapezu; – potrafi udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki przekątnych trapezu; – potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące czworokątów, w tym trapezów i równoległoboków; – potrafi stosować twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie, w rozwiązywaniu złożonych zadań o średnim stopniu trudności; – potrafi zastosować twierdzenia o okręgu	Uczeń: – umie udowodnić twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie; – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące czworokątów, czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu, korzystając przy tym z wcześniej poznanych twierdzeń.

zadań; – wie, jakie własności ma romb; – zna własności prostokąta i kwadratu; – wie, co to są trapezoidy, potrafi podać przykłady takich figur; – zna własności deltoidu; – rozumie, co to znaczy, że czworokąt jest wpisany w okrąg, czworokąt jest opisany na okręgu; – zna warunki, jakie musi spełniać czworokąt, aby można było okrąg wpisać w czworokąt oraz aby można było okrąg opisać na czworokącie; potrafi zastosować te warunki w rozwiązywaniu prostych zadań; – potrafi wymienić nazwy czworokątów, w które można wpisać, i nazwy czworokątów, na których można opisać okrąg; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące trapezów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu, w tym również z wykorzystaniem wcześniej poznanych własności trapezu; – korzysta z wcześniej zdobytej wiedzy do rozwiązywania zadań dotyczących czworokątów (trygonometria, twierdzenie Talesa, twierdzenie Pitagorasa, własności trójkątów itp.); – zna i rozumie definicję podobieństwa; – potrafi wskazać figury podobne; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące podobieństwa czworokątów.	wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie do rozwiązania zadań o średnim stopniu trudności dotyczących trapezów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu; – potrafi wyprowadzić wzór na pole czworokąta opisanego na okręgu w zależności od długości promienia okręgu i obwodu tego czworokąta; – korzysta z wcześniej poznanych twierdzeń (np. twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów) do rozwiązywania zadań dotyczących czworokątów.	

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Z kawałka materiału mającego kształt trapezu prostokątnego o podstawach długości 1,2 m i 0,4 m oraz wysokości 1,5 m wycięto chorągiewkę w kształcie trójkąta równoramiennego, którego podstawą jest dłuższe ramię trapezu, a jeden z wierzchołków należy do krótszego ramienia trapezu. a) Wyznacz długości odcinków, na jakie ten wierzchołek podzielił krótsze ramię trapezu. b) Oblicz długości boków chorągiewki. Wyniki podaj z dokładnością do 0,01 m. Zadanie 2. W równoległoboku *ABCD* wysokość *DE* o długości 8 cm dzieli bok *AB* na odcinki długości: $\lvert AE \rvert = 4{,}5$ cm, $\lvert EB \rvert = 6$ cm. Oblicz długości przekątnych tego równoległoboku. Zadanie 3. Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość 8 cm. Wiedząc, że w ten trapez można wpisać okrąg, oblicz obwód trapezu. Zadanie 4. W równoległoboku *ABCD* bok *AB* jest dwa razy dłuższy od boku *AD*. Na boku *AB* zaznaczono punkt	Zadanie 1. Uzasadnij, że odcinek łączący środki przekątnych dowolnego trapezu jest równoległy do podstaw i jego długość jest równa połowie różnicy długości podstaw. Zadanie 2. Wykaż, że środki przekątnych trapezoidu i środki dwóch przeciwległych jego boków są wierzchołkami równoległoboku. Zadanie 3. W trapez *ABCD*, $AB \parallel CD$, wpisano okrąg o środku *O*. Uzasadnij, że $\lvert \angle BOC \rvert = 90°$. Zadanie 4. W trapezie równoramiennym jedna z podstaw jest trzy razy dłuższa od drugiej, a długość drugiej podstawy jest połową długości ramienia. Wykaż, że w ten trapez można wpisać okrąg.	Zadanie 1. W danym okręgu punkt *A* jest środkiem łuku *BC*, a dwie dowolne cięciwy *AD*, *AE* przecinają cięciwę *BC* w punktach B_1 i C_1. Wykaż, że wówczas na czworokącie B_1C_1ED można opisać okrąg.

K, a na boku *DC* – punkt *L* w taki sposób, że czworokąt *AKLD* jest podobny do równoległoboku *ABCD*. Wyznacz skalę tego podobieństwa. Oblicz stosunek $\|AK\| : \|KB\|$.		

4. Geometria płaska – pole czworokąta

Tematyka zajęć:

- Pole prostokąta. Pole kwadratu
- Pole równoległoboku. Pole rombu
- Pole trapezu
- Pole czworokąta – zadania różne
- Pola figur podobnych
- Mapa. Skala mapy

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi zastosować wzory na pole kwadratu i prostokąta w rozwiązaniach prostych zadań; – zna wzory na pole równoległoboku; potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące równoległoboków, wykorzystując wzór na jego pole i poznane wcześniej twierdzenia; – zna wzory na pole rombu; potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące rombów, wykorzystując wzory na jego pole i poznane wcześniej twierdzenia; – zna wzór na pole trapezu; potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące trapezów, wykorzystując wzór na jego pole i poznane wcześniej twierdzenia; – potrafi rozwiązywać proste zadania	Uczeń: – potrafi wyprowadzić wzór na pole równoległoboku; – potrafi wyprowadzić wzory na pole rombu; – potrafi wyprowadzić wzór na pole trapezu; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu trudności, wykorzystując wzory na pola trójkątów i czworokątów, w tym również z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń (np. twierdzenia sinusów i cosinusów, twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i opisanym na czworokącie).	Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem wzorów na pola figur i innych twierdzeń.

geometryczne dotyczące czworokątów, wykorzystując wzory na ich pola i poznane wcześniej twierdzenia, w szczególności twierdzenie Pitagorasa oraz twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt i opisanym na czworokącie; – zna związek między polami figur podobnych i potrafi korzystać z tego związku, rozwiązując zadania geometryczne o niewielkim stopniu trudności.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Przekątna kwadratu jest o 2 cm dłuższa od boku tego kwadratu. Oblicz pole kwadratu. <u>Zadanie 2.</u> Oblicz pole równoległoboku, którego przekątne długości 13 cm i 8 cm przecinają się pod kątem 60°. <u>Zadanie 3.</u> W równoległoboku *ABCD* przekątne *AC* i *DB* przecinają się w punkcie *S*. a) Wykaż, że pole równoległoboku *ABCD* jest cztery razy większe od pola trójkąta *ASD*. b) Wiedząc dodatkowo, że pole trójkąta *ASD* jest o 15 cm^2 mniejsze od pola równoległoboku	<u>Zadanie 1.</u> W równoległobok o krótszym boku długości 5 dm wpisano dwa jednakowe koła o promieniu długości 2 dm, każde styczne do trzech boków równoległoboku i styczne do siebie. Oblicz obwód i pole równoległoboku. <u>Zadanie 2.</u> Romb o boku długości 18 cm podzielono na trzy części o równych polach prostymi przechodzącymi przez wierzchołek kąta ostrego. Oblicz długości odcinków, na jakie te proste podzieliły boki rombu. <u>Zadanie 3.</u> Pola trójkątów, których podstawami są podstawy	<u>Zadanie 1.</u> W równoległoboku *ABCD* są dane: $\lvert AB\rvert = 18$, $\lvert BC\rvert = 10$ oraz $\lvert \angle ABC\rvert = 120°$. Punkt *K* należy do boku *AB* i $\lvert AK\rvert = 12$. Punkt *L* jest środkiem boku *BC*. Proste *CK* i *DL* przecinają się w punkcie *M*. Oblicz pole czworokąta *KBLM*.

ABCD, oblicz pole tego równoległoboku. <u>Zadanie 4.</u> Przekątne rombu mają długość 10 cm i 24 cm. Oblicz sinus kąta ostrego tego rombu i na tej podstawie ustal, czy kąt ostry rombu ma miarę większą od $45°$, czy mniejszą. <u>Zadanie 5.</u> Obwód czworokąta jest równy 54 cm. W czworokąt ten wpisano koło o promieniu 4 cm. Oblicz pole danego czworokąta. <u>Zadanie 6.</u> Czworokąty F_1 i F_2 są podobne. Obwód czworokąta F_1 jest o 15% większy od obwodu czworokąta F_2. O ile procent pole czworokąta F_1 jest większe od pola czworokąta F_2?	trapezu, a wspólnym wierzchołkiem jest punkt przecięcia się przekątnych tego trapezu, są równe P_1 i P_2. Oblicz pole trapezu. <u>Zadanie 4.</u> Na okręgu opisano trapez prostokątny. Odległości środka okręgu od końców dłuższego ramienia są równe 3 cm i 7 cm. Oblicz pole trapezu.	

5. Wielomiany

Tematyka zajęć:

- Wielomian jednej zmiennej rzeczywistej
- Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów
- Równość wielomianów
- Podzielność wielomianów
- Dzielenie wielomianów. Dzielenie wielomianów z resztą
- Dzielenie wielomianu przez dwumian liniowy za pomocą schematu Hornera
- Pierwiastek wielomianu
- Twierdzenie Bezouta
- Pierwiastek wielokrotny
- Rozkładanie wielomianów na czynniki
- Równania wielomianowe
- Zadania prowadzące do równań wielomianowych
- Równania wielomianowe z parametrem
- Funkcje wielomianowe
- Nierówności wielomianowe

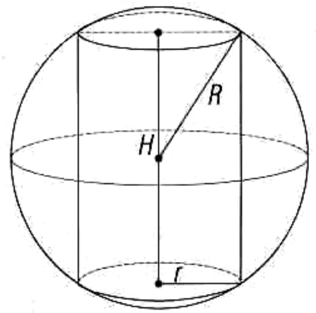
Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna pojęcie jednomianu jednej zmiennej; – potrafi wskazać jednomiany podobne; – potrafi rozpoznać wielomian jednej zmiennej rzeczywistej; – potrafi uporządkować wielomian (malejąco lub rosnąco); – potrafi określić stopień wielomianu jednej zmiennej;	Uczeń: – potrafi sprawnie wykonywać działania na wielomianach; – potrafi udowodnić twierdzenie Bezouta; – zna i potrafi stosować twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych; – potrafi udowodnić twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach	Uczeń: – potrafi rozwiązywać różne problemy dotyczące wielomianów, które wymagają niestandardowych metod pracy oraz niekonwencjonalnych pomysłów.

– potrafi obliczyć wartość wielomianu dla danej wartości zmiennej; – potrafi wykonać dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów; – potrafi podzielić wielomian przez dwumian *ax* + *b*; – potrafi podzielić wielomian przez dowolny wielomian; – potrafi podzielić wielomian przez dwumian liniowy za pomocą schematu Hornera; – potrafi rozpoznać wielomiany równe; – potrafi rozwiązywać proste zadania, w których wykorzystuje się twierdzenie o równości wielomianów; – potrafi sprawdzić, czy podana liczba jest pierwiastkiem wielomianu; – potrafi określić krotność pierwiastka wielomianu; – zna twierdzenie Bezouta i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań; – zna twierdzenie o reszcie i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań; – potrafi wyznaczyć wielomian, który jest resztą z dzielenia wielomianu o danych własnościach przez inny wielomian; – potrafi rozłożyć wielomian na czynniki poprzez wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias, zastosowanie wzorów skróconego mnożenia, zastosowanie metody grupowania wyrazów, a także wówczas, gdy ma podany jeden	całkowitych; – potrafi sprawnie rozkładać wielomiany na czynniki (w tym stosując „metodę prób”); – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe z wartością bezwzględną; – potrafi rozwiązywać zadania dotyczące własności wielomianów, w których występują parametry; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe z parametrem; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wielomianowych; – potrafi udowodnić wzory Viète’a dla równania trzeciego stopnia.	

z pierwiastków wielomianu i konieczne jest znalezienie pozostałych z wykorzystaniem twierdzenia Bezouta; – potrafi rozwiązywać równania wielomianowe, które wymagają umiejętności rozkładania wielomianów na czynniki wymienionych w poprzednim punkcie; – potrafi rozwiązywać proste zadania tekstowe prowadzące do równań wielomianowych; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące wielomianów, w których występują parametry; – zna definicję funkcji wielomianowej; – potrafi naszkicować przybliżony wykres funkcji wielomianowej na podstawie informacji o miejscach zerowych tej funkcji oraz znaku współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej; – potrafi rozwiązywać nierówności wielomianowe (korzystając z siatki znaków, posługując się przybliżonym wykresem funkcji wielomianowej).		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Oblicz sumę wszystkich współczynników wielomianu $W(x) = (3x^7 - 2x^{16})^{2014}$. <u>Zadanie 2.</u> Wykonaj dzielenie z resztą:	<u>Zadanie 1.</u> Udowodnij, że jeśli x_1, x_2, x_3 są rozwiązaniami równania $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, to	<u>Zadanie 1.</u> Znajdź wszystkie pary p, q liczb całkowitych takie, że wielomian określony wzorem $W(x) = 1 - 2x - 9x^2 + x^3$ spełnia warunki

$(2x^4 - 3x^3 + 4x - 6) : (x^2 + 2x - 3)$. <u>Zadanie 3.</u> Rozłóż na czynniki możliwie najniższego stopnia wielomiany: a) $W(x) = 125x^3 - 8$; b) $W(x) = 9x^3 - 4x^2 - 27x + 12$; c) $W(x) = 6x^4 - 12x^3 + 6x^2$. Podaj pierwiastki powyższych wielomianów. Określ krotność pierwiastków. <u>Zadanie 4..</u> Dla jakich wartości parametru a reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^4 - 3x^2 + ax + a^2x + 2$ przez dwumian $(x - 1)$ jest większa od 3? <u>Zadanie 5.</u> Rozwiąż równanie i nierówność: a) $x^3 + 4x^2 - 2x - 8 = 0$; b) $(x^2 + 1)(x - x^2 - 5)(x^2 + 6x + 9)(x^2 - x - 2) \geq 0$. <u>Zadanie 6.</u> Iloczyn kwadratu pewnej liczby i kwadratu liczby o 4 od niej większej jest równy 441. Wyznacz te liczby. <u>Zadanie 7.</u> Funkcja wielomianowa $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$, ma dwa różne miejsca zerowe: $x_1 = -2$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q \\ x_1x_2x_3 = -r \end{cases}$. <u>Zadanie 2.</u> Wyznacz wszystkie wartości parametru p tak, aby równanie $3x^3 + 2(p - 2)x^2 - 2px + 1 = 0$ miało trzy różne rozwiązania. <u>Zadanie 3.</u> Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których nierówność $x^4 + (m - 2)x^2 + m + 1 > 0$ jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą. <u>Zadanie 4.</u> W kulę o promieniu 10 cm wpisano walec, którego objętość stanowi 43,2% objętości kuli.  Wyznacz wymiary walca. <u>Zadanie 5.</u> Rozwiąż równanie i nierówność:	$W(p) = q$ i $W(q) = p$.

oraz $x_2 = 3$. Liczba x_2 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Dla argumentu 1 wartość wielomianu wynosi -12. a) Wyznacz wartości współczynników a, b, c, d. b) Dla wyznaczonych współczynników rozwiąż nierówność $W(x) \geq 0$.	a) $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + x - 3\frac{1}{3} = 0$ b) $x^2 \leq \|6x - x^3\|$.	

6. Ułamki algebraiczne. Równania i nierówności wymierne. Funkcje wymierne

Tematyka zajęć:

- Ułamek algebraiczny. Skracanie i rozszerzanie ułamków algebraicznych
- Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych
- Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych
- Zadania na dowodzenie z zastosowaniem ułamków algebraicznych
- Równania wymierne
- Zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych
- Nierówności wymierne
- Równania i nierówności wymierne z parametrem
- Proporcjonalność odwrotna
- Funkcje wymierne
- Funkcja homograficzna
- Zastosowanie funkcji homograficznej w zadaniach

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna pojecie ułamka algebraicznego jednej zmiennej; – potrafi wyznaczyć dziedzinę ułamka algebraicznego; – potrafi podać przykład ułamka algebraicznego o zadanej dziedzinie; – potrafi wykonywać działania na ułamkach algebraicznych, takie jak: skracanie ułamków, rozszerzanie ułamków, dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych, określając warunki wykonalności	Uczeń: – potrafi sprawnie wykonywać działania łączne na ułamkach algebraicznych; – potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie z zastosowaniem ułamków algebraicznych (w tym zadania dotyczące związków pomiędzy średnimi: arytmetyczną, geometryczną, średnią kwadratową); – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wymierne; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wymierne z wartością bezwzględną;	Uczeń: – potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania wymiernego z parametrem; – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące funkcji wymiernych wymagające zastosowania niekonwencjonalnych metod.

tych działań; – potrafi wykonywać działania łączne na ułamkach algebraicznych; – potrafi rozwiązywać proste zadania na dowodzenie z zastosowaniem ułamków algebraicznych; – zna definicję równania wymiernego; – potrafi rozwiązywać proste równania wymierne; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do prostych równań wymiernych; – zna definicję nierówności wymiernej; – potrafi rozwiązywać proste nierówności wymierne; – wie, jaką zależność między dwiema wielkościami zmiennymi, nazywamy proporcjonalnością odwrotną; potrafi wskazać współczynnik proporcjonalności; – rozwiązuje zadania z zastosowaniem proporcjonalności odwrotnej; – zna definicję funkcji wymiernej; – potrafi określić dziedzinę funkcji wymiernej; – rozwiązuje proste zadania z parametrem dotyczące funkcji wymiernych; – zna definicję funkcji homograficznej $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$ i $ad - cb \neq 0$; – potrafi przekształcić wzór funkcji $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$ i $ad - cb \neq 0$, do postaci	– potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wymiernych (także z wartością bezwzględną); – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wymierne z parametrem; – potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wymiernych; – potrafi rozwiązywać zadania dotyczące własności funkcji wymiernej (w tym z parametrem); – potrafi dowodzić własności funkcji wymiernej; – potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące własności funkcji homograficznej; – potrafi napisać wzór funkcji homograficznej na podstawie informacji o jej wykresie; – potrafi naszkicować wykres funkcji homograficznej z wartością bezwzględną i na podstawie wykresu funkcji opisać własności funkcji; – potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania wymiernego z wartością bezwzględną i parametrem, na podstawie wykresu funkcji homograficznej, we wzorze której występuje wartość bezwzględna; – potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wymiernych.	

$y = \dfrac{k}{x-p} + q$; – potrafi naszkicować wykres funkcji homograficznej o równaniu $y = \dfrac{k}{x-p} + q$; – potrafi na podstawie wzoru funkcji $y = \dfrac{k}{x-p} + q$ określić jej dziedzinę i zbiór wartości; – potrafi obliczyć miejsce zerowe funkcji homograficznej oraz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji i osi *OY*; – potrafi wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji $y = \dfrac{k}{x-p} + q$; – potrafi przekształcać wykres funkcji homograficznej w S_{OX}, S_{OY}, $S_{(0,\,0)}$, przesunięciu równoległym o dany wektor; – potrafi rozwiązywać proste zadania z parametrem dotyczące funkcji homograficznej.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie: $\dfrac{x-6}{4x} : \dfrac{x^2-36}{8} - \dfrac{x+2}{x+6}$. Podaj konieczne założenia.	<u>Zadanie 1.</u> a) Wykaż, że jeśli liczby *a*, *b*, *c* są dodatnie, to $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. b) Wykaż, że jeśli $a \neq 0$, to $a^4 + \dfrac{128}{a^2} \geq 48$.	<u>Zadanie 1.</u> Rozwiąż równanie z parametrem *a* ($a \in \boldsymbol{R}$): $\dfrac{1}{2a+ax} - \dfrac{1}{2x-x^2} = \dfrac{2(a+3)}{x^3-4x}$.

Zadanie 2.

Wykaż, że jeśli $m > 0$ i $0 < b < a$, to $\frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$.

Zadanie 3.

Rozwiąż równanie i nierówność:

a) $\frac{x^3 - x^2 + 8}{x^3 - 8} = \frac{1}{x^2 + 2x + 4} + \frac{1}{x+2}$

b) $x^2 + 3x - 1 < \frac{3}{x}$.

Zadanie 4.

Przez jeden z kranów woda wypływa ze zbiornika, a przez drugi do niego wpływa. Po otworzeniu obu kranów zbiornik zostanie napełniony wodą w ciągu 12 godzin. W ciągu ilu godzin pierwszy kran opróżnia pełny zbiornik, a drugi napełnia pusty zbiornik, jeśli wiadomo, że czas napełniania zbiornika jest o godzinę krótszy od czasu jego opróżniania?

Zadanie 5.

Funkcja F określona jest wzorem $F(x) = \frac{ax-1}{x+2}$.

Wyznacz wartość parametru a tak, aby do wykresu funkcji F należał punkt $A(3, 1)$.

Dla wyznaczonej wartości parametru:

a) sprowadź wzór tej funkcji F do postaci

$F(x) = \frac{k}{x-p} + q$;

Zadanie 2.

Rozwiąż równanie i nierówność:

a) $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 15$

b) $\frac{|x^2 - x| + 1}{|x+1| - x^2} \geq 1$.

Zadanie 3.

Funkcja $F(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, gdzie $ac - b \neq 0$ i $x \neq -c$, jest monotoniczna w przedziałach $(-\infty, 3)$, $(3, +\infty)$, zbiorem wartości funkcji jest zbiór $\boldsymbol{R} - \{2\}$, zaś jej miejscem zerowym jest liczba $-2{,}5$. Wyznacz wartości współczynników a, b, c.

Następnie:

a) podaj zbiór tych argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości nieujemne;

b) naszkicuj wykres funkcji $G(x) = F(|x|)$ i na jego podstawie zbadaj liczbę rozwiązań równania $G(x) = m$, gdzie $m \in \boldsymbol{R}$.

Zadanie 4.

Dla jakich wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$) zbiorem rozwiązań nierówności

$-7 < \frac{x^2 + (m+1)x - 5}{x^2 - x + 1} < 3$ jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?

Zadanie2.

Wykaż, że jeśli $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

i $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$, to $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

b) określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji F; c) podaj przedziały monotoniczności funkcji F; d) wyznacz zbiór tych argumentów, dla których wartości funkcji F są większe od wartości funkcji $G(x) = \frac{x+3}{2x-5}$.	<u>Zadanie 5.</u> Dla jakich wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$) równanie $\frac{2x^2-(m-4)x+m+2}{x+2} = 0$ ma dwa różne rozwiązania ujemne?	

7. Ciągi

Tematyka zajęć:

- Określenie ciągu. Sposoby opisywania ciągów
- Monotoniczność ciągów
- Ciąg arytmetyczny
- Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
- Ciąg geometryczny
- Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego
- Lokaty pieniężne i kredyty bankowe
- Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny – zadania różne
- Granica ciągu liczbowego
- Własności ciągów zbieżnych
- Ciągi rozbieżne do nieskończoności
- Szereg geometryczny

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna definicję ciągu (ciągu liczbowego); – potrafi wyznaczyć dowolny wyraz ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym; – potrafi narysować wykres ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym; – potrafi zbadać na podstawie definicji monotoniczność ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym; – potrafi podać przykłady ciągów liczbowych monotonicznych; – potrafi sprawdzić, które wyrazy ciągu należą do	Uczeń: – potrafi określić ciąg wzorem rekurencyjnym; – potrafi wyznaczyć wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym; – wie, jaki ciąg liczbowy nazywamy ciągiem Fibonacciego; zna definicję rekurencyjną tego ciągu i wzór na wyraz ogólny; – potrafi wyprowadzić wzór na sumę *n* kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; – potrafi wyprowadzić wzór na sumę *n* kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego; – potrafi udowodnić nierówność Bernoulliego;	Uczeń: – zna, rozumie i potrafi zastosować twierdzenie o trzech ciągach do obliczenia granicy danego ciągu; – wie, co to jest liczba e oraz potrafi obliczać granice ciągów z liczbą e. – potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie, w których jest mowa o ciągach.

danego przedziału; – potrafi wyznaczyć wyrazy ciągu o podanej wartości; – zna definicję ciągu arytmetycznego; – potrafi zbadać na podstawie definicji, czy dany ciąg określony wzorem ogólnym jest arytmetyczny; – potrafi podać przykłady ciągów arytmetycznych; – zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego; – zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań wzór na sumę *n* kolejnych początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; – potrafi wykorzystać średnią arytmetyczną do obliczenia wyrazu środkowego ciągu arytmetycznego; – zna definicję ciągu geometrycznego; – potrafi zbadać na podstawie definicji, czy dany ciąg określony wzorem ogólnym jest geometryczny; – zna i potrafi stosować w rozwiązywaniu zadań wzór na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego; – zna i potrafi stosować wzór na sumę *n* kolejnych początkowych wyrazów ciągu geometrycznego; – potrafi wykorzystać średnią geometryczną do obliczenia wyrazu środkowego ciągu geometrycznego; – potrafi wyznaczyć ciąg arytmetyczny	– zna definicję i rozumie pojęcie granicy ciągu liczbowego zbieżnego; – potrafi wykazać na podstawie definicji, że dana liczba jest granicą ciągu; – zna i potrafi stosować twierdzenia dotyczące własności ciągów zbieżnych; – potrafi obliczać granice różnych ciągów zbieżnych; – potrafi obliczać granice niewłaściwe różnych ciągów rozbieżnych do nieskończoności; – potrafi rozwiązywać różne zadania z zastosowaniem wiadomości o szeregu geometrycznym zbieżnym.	

(geometryczny) na podstawie wskazanych danych; – potrafi stosować procent prosty i składany w zadaniach dotyczących oprocentowania lokat i kredytów; – potrafi rozwiązywać zadania „mieszane” dotyczące ciągów arytmetycznych i geometrycznych; – rozumie intuicyjnie pojęcie granicy ciągu liczbowego zbieżnego; – zna i potrafi stosować twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów zbieżnych; – potrafi obliczyć granicę ciągu liczbowego (proste przykłady); – potrafi odróżnić ciąg geometryczny od szeregu geometrycznego; – zna warunek na zbieżność szeregu geometrycznego i wzór na sumę szeregu; – potrafi zbadać warunek na istnienie sumy szeregu geometrycznego (proste przykłady); – potrafi obliczać sumę szeregu geometrycznego (zamiana ułamka okresowego na ułamek zwykły, proste równania i nierówności wymierne, proste zadania geometryczne); – potrafi obliczać granice niewłaściwe ciągów rozbieżnych do nieskończoności (proste przykłady).		

Przykładowe zadania

Zadanie 1.
Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem ogólnym

$a_n = \dfrac{3n+4}{n+1}$.

a) Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).
b) Oblicz granicę ciągu (a_n).
c) Wyznacz te wyrazy ciągu (a_n), które należą do przedziału $(3\frac{1}{8}, 3\frac{3}{4})$.

Zadanie 2.
Suma czwartego i siódmego wyrazu ciągu arytmetycznego wynosi 86, a suma drugiego i trzynastego wyrazu tego ciągu jest równa 22. Znajdź pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu. Oblicz, ile wyrazów tego ciągu daje w sumie liczbę -73450.

Zadanie 3.
Firma zdeponowała w banku pewną sumę pieniędzy na trzy lata. Po tym okresie na koncie tej firmy było 283 031,15 zł. Wiedząc, że roczna stopa procentowa wynosiła 20%, a odsetki kapitalizowane były co pół roku, oblicz jaką kwotę zdeponowała firma.

Zadanie 1.
Wyznacz wyraz ogólny ciągu geometrycznego określonego wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = (-4)\cdot a_{n-1} \end{cases}$$

Zadanie 2.
Ciąg arytmetyczny ma pięć wyrazów. Środkowy wyraz tego ciągu ma wartość 5. Pierwszy, drugi i piąty wyraz tego ciągu (w podanej kolejności) tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz wyrazy ciągu geometrycznego.

Zadanie 3.
Wykaż, na podstawie definicji, że liczba $\frac{2}{3}$ jest granicą ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{2n+1}{3n-2}$.

Zadanie 4.
Oblicz granice ciągów:

$a_n = \sqrt{n^2-2n} - n$;

$$b_n = \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+.....+\frac{1}{3^{n-1}}}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+.....+\frac{1}{4^{n-1}}}.$$

Zadanie 1.
Udowodnij, że jeśli a, b, c i d tworzą ciąg geometryczny, to
$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) =$
$= (ab + bc + cd)^2$.

Zadanie 2.
Oblicz granice ciągów:

a) $a_n = \dfrac{2n^2 \cdot \cos(4n)}{n^3+3n+5}$;

b) $b_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2}$.

Zadanie 4. Ciąg (a, b, 4) jest ciągiem arytmetycznym, a ciąg (4, a, b) jest ciągiem geometrycznym. Wyznacz a, b. Zadanie 5. Zapisz liczbę 0,93303303303... w postaci ilorazu dwóch liczb całkowitych. Zadanie 6. Rozwiąż równanie $2x + 4 + \frac{8}{x} = -\frac{16}{3}$.	Zadanie 5. Wykaż, że w nieskończonym ciągu geometrycznym zbieżnym, w którym $a_1q \neq 0$, stosunek dowolnego wyrazu tego ciągu do sumy wszystkich występujących po nim wyrazów, jest stały. Jaki powinien być iloraz tego ciągu, aby dowolny wyraz tego ciągu równał się pięciokrotnej sumie wszystkich wyrazów po nim występujących?	

8. Trygonometria

Tematyka zajęć:

- Miara łukowa kąta
- Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej
- Wykresy funkcji $y = \sin x$ oraz $y = \cos x$
- Wykresy funkcji $y = \operatorname{tg} x$ oraz $y = \operatorname{ctg} x$
- Przekształcenia wykresów funkcji trygonometrycznych
- Proste równania trygonometryczne
- Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy
- Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych
- Równania trygonometryczne
- Nierówności trygonometryczne

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – wie, co to jest miara łukowa kąta; – potrafi stosować miarę łukową i stopniową kąta (zamieniać stopnie na radiany i radiany na stopnie); – zna definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta i potrafi się nimi posługiwać w rozwiązywaniu zadań; – zna związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta; – potrafi wyznaczyć wartości pozostałych funkcji	Uczeń: – potrafi zbadać, czy funkcja trygonometryczna jest parzysta (nieparzysta); – potrafi określić zbiór wartości funkcji trygonometrycznej; – potrafi wyznaczyć okres podstawowy funkcji trygonometrycznej; – potrafi przekształcać wykresy funkcji trygonometrycznych, stosując takie przekształcenia, jak: $y = \lvert f(x)\rvert$, $y = f(\lvert x\rvert)$, $y = s \cdot f(x)$ oraz $y = f(s \cdot x)$, gdzie $s \neq 0$;	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności lub wymagające niekonwencjonalnych pomysłów i metod rozwiązywania.

trygonometrycznych kąta, gdy dana jest jedna z nich; – zna i potrafi stosować wzory redukcyjne dla kątów o miarach wyrażonych w stopniach oraz radianach; – potrafi naszkicować wykres funkcji $y = \sin x$ i omówić jej własności; – potrafi naszkicować wykres funkcji $y = \cos x$ i omówić jej własności; – potrafi naszkicować wykres funkcji $y = \mathrm{tg}\, x$ i omówić jej własności; – potrafi naszkicować wykres funkcji $y = \mathrm{ctg}\, x$ i omówić jej własności; – potrafi przekształcać wykresy funkcji trygonometrycznych, stosując takie przekształcenia, jak: symetria osiowa względem osi *OX*, symetria osiowa względem osi *OY*, symetria środkowa, względem punktu (0, 0), przesunięcie równoległe o dany wektor) – potrafi wyznaczyć zbiór wartości funkcji trygonometrycznej (w prostych przypadkach); – wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych; – potrafi rozwiązywać proste równania i nierówności trygonometryczne, korzystając z wykresów odpowiednich funkcji trygonometrycznych; – zna wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów i potrafi je stosować do rozwiązywania prostych zadań;	– potrafi stosować wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzory na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta do przekształcania wyrażeń trygonometrycznych; – potrafi stosować wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzory na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności trygonometryczne z zastosowaniem wzorów na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzorów na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzorów na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności trygonometryczne z wartością bezwzględną z zastosowaniem poznanych wzorów; – potrafi rozwiązywać równania trygonometryczne z parametrem; – potrafi rozwiązywać różne zadania z innych działów matematyki, w których wykorzystuje się wiadomości i umiejętności z trygonometrii.	

– zna wzory na sumę i różnicę sinusów i cosinusów i potrafi je stosować do rozwiązywania prostych zadań; – zna wzory na sinus i cosinus kąta podwojonego kąta i potrafi je stosować do rozwiązywania prostych zadań; – potrafi rozwiązywać proste równania i nierówności trygonometryczne z zastosowaniem poznanych wzorów.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> a) Zamień 240° na radiany. b) Zamień $\frac{2}{5}\pi$ radianów na stopnie. <u>Zadanie 2.</u> Wyznacz zbiór wartości funkcji określonej wzorem $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{2}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$. <u>Zadanie 3.</u> Oblicz wartość wyrażenia $\cos\alpha - \cos\beta$, jeśli $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{7}}{5}$ i $\alpha, \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. <u>Zadanie 4.</u>	<u>Zadanie 1.</u> Wyznacz zbiór wartości funkcji określonej wzorem $f(x) = \cos x + \cos\frac{x}{2}$. <u>Zadanie 2.</u> Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 0{,}5 \cdot \sin(2x - \frac{\pi}{3})$. <u>Zadanie 3.</u> Wykaż, że $2(1 + \cos\alpha) - \sin^2\alpha = 4\cos^4\frac{\alpha}{2}$. <u>Zadanie 4.</u> Dla jakich wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$) równanie $\sin^4 x + \cos^4 x = m$ ma rozwiązanie.	<u>Zadanie 1.</u> Wykaż, że $\mathrm{tg}^2\frac{2\pi}{5} = 5\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{5}$.

Sprawdź, czy prawdziwa jest równość $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$. Podaj konieczne założenia. <u>Zadanie 5.</u> a) Rozwiąż równanie $2\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = 1$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$; b) Rozwiąż nierówność $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 \geq 0$, gdzie $x \in (-\pi, 2\pi)$.	<u>Zadanie 5.</u> Rozwiąż równanie $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ w przedziale $(-\pi, \pi)$. <u>Zadanie 6.</u> Rozwiąż nierówność $\sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \sin^8 x + \ldots \geq 1$.	