PLAN WYNIKOWY

(zakres rozszerzony)

klasa 3.

Spis treści

1. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Tematyka zajęć:

- Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie
- Funkcja wykładnicza i jej własności
- Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem wykresów funkcji wykładniczych
- Równania wykładnicze
- Nierówności wykładnicze
- Zastosowanie równań i nierówności wykładniczych w rozwiązywaniu zadań
- Logarytm – powtórzenie wiadomości
- Funkcja logarytmiczna i jej własności
- Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej
- Rozwiązywanie równań, nierówności oraz układów równań z zastosowaniem wykresu funkcji logarytmicznej
- Równania logarytmiczne
- Nierówności logarytmiczne
- Równania i nierówności logarytmiczno-wykładniczo-potęgowe
- Zastosowanie równań i nierówności logarytmicznych w rozwiązywaniu zadań
- Zastosowanie funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi sprawnie wykonywać działania na potęgach o wykładniku rzeczywistym; – stosuje własności działań na potęgach w rozwiązywaniu zadań; – zna definicję funkcji wykładniczej; – potrafi odróżnić funkcję wykładniczą od innych	Uczeń: – potrafi szkicować wykresy funkcji wykładniczych z wartością bezwzględną; – potrafi szkicować wykresy funkcji logarytmicznych z wartością bezwzględną; – potrafi interpretować graficznie równania wykładnicze z parametrem;	Uczeń: – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze z parametrem; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności logarytmiczne z parametrem;

– funkcji; – potrafi szkicować wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw; – potrafi opisać własności funkcji wykładniczej na podstawie jej wykresu; – potrafi przekształcać wykresy funkcji wykładniczych (S_{OX}, S_{OY}, $S_{(0,0)}$, przesunięcie równoległe o dany wektor); – potrafi rozwiązywać graficznie równania, nierówności oraz układy równań z zastosowaniem wykresów funkcji wykładniczych; – zna pojęcie równania wykładniczego oraz nierówności wykładniczej; – potrafi rozwiązywać algebraicznie i graficznie proste równania oraz nierówności wykładnicze; – potrafi obliczyć logarytm liczby dodatniej; – zna i potrafi stosować własności logarytmów do obliczania wartości wyrażeń; – zna definicję funkcji logarytmicznej; – potrafi odróżnić funkcję logarytmiczną od innej funkcji; – potrafi określić dziedzinę funkcji logarytmicznej; – potrafi szkicować wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw; – potrafi opisać własności funkcji logarytmicznej na podstawie jej wykresu; – potrafi przekształcać wykresy funkcji logarytmicznych (S_{OX}, S_{OY}, $S_{(0,0)}$, przesunięcie równoległe o dany wektor);	– potrafi interpretować graficznie równania logarytmiczne z parametrem; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze oraz logarytmiczne z wartością bezwzględną; – potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wykładniczych oraz logarytmicznych; – potrafi rozwiązywać równania wykładniczo-potęgowo-logarytmiczne; – potrafi dowodzić własności logarytmów; – potrafi naszkicować zbiór punktów płaszczyzny spełniających dane równanie lub nierówność z dwiema niewiadomymi, w których występują logarytmy; – potrafi badać, na podstawie definicji, własności funkcji wykładniczych i logarytmicznych (np. parzystość, nieparzystość, monotoniczność); – potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie (o średnim stopniu trudności), w których wykorzystuje wiadomości dotyczące funkcji wykładniczej i logarytmicznej; – potrafi stosować wiadomości o funkcji wykładniczej i logarytmicznej w różnych zadaniach (np. dotyczących ciągów, szeregów, trygonometrii, itp.).	– potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie (o podwyższonym stopniu trudności), w których wykorzystuje własności funkcji wykładniczych i logarytmicznych.

– potrafi graficznie rozwiązywać równania, nierówności oraz układy równań z zastosowaniem wykresów funkcji logarytmicznych; – potrafi algebraicznie rozwiązywać proste równania oraz nierówności logarytmiczne; – rozwiązuje zadania tekstowe osadzone w kontekście praktycznym, w których wykorzystuje umiejętność rozwiązywania prostych równań i nierówności wykładniczych oraz logarytmicznych (lokaty bankowe, rozpad substancji promieniotwórczych itp.) – posługuje się funkcjami wykładniczymi oraz funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych itp.		

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Wykaż, że jeśli $a = \log_{45} 3$ to $\log_3 5 = \frac{1-2a}{a}$. <u>Zadanie 2.</u> a) Rozwiąż graficznie równanie $3^x - 1 = -2x^2 + 4x$. b) Rozwiąż nierówność $\log_{\frac{1}{4}} \frac{3}{x-1} > \log_{\frac{1}{4}} \frac{2}{x+1}$. c) Rozwiąż równanie $\log(x + 3) - \log 0{,}4 = 2\log(x - 2)$.	<u>Zadanie 1.</u> a) Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \left\vert \log_2 \frac{x-2}{x^2-4} \right\vert$. b) Naszkicuj wykres funkcji f. c) Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m, dla których równanie $\left\vert \log_2 \frac{x-2}{x^2-4} \right\vert = m^2 - 2$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. <u>Zadanie 2.</u> Rozwiąż równanie i nierówność:	<u>Zadanie 1.</u> Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \boldsymbol{R}$, dla których równanie $\log[(m + 4)x] = \log(x^2 + 2x)$ ma tylko jedno rozwiązanie, które jest liczbą ujemną. <u>Zadanie 2.</u> Wykaż, że $\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 \geq 4{,}4$.

Zadanie 3. Określ dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{x^2-1}(x^2-2x-3)$. Zadanie 4. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 1 - \log_2(x+3)$ i na jego podstawie omów własności funkcji f. Zadanie 5. Pan Kowalski złożył w banku pewną kwotę K_0 [zł] na procent składany w wysokości 4% rocznie przy kapitalizacji kwartalnej. Oblicz, po ilu latach kwota ta podwoi się. Uwzględnij 18% podatek od odsetek.	a) $\frac{1}{4}\sqrt{12-3^{x+1}} = 3^x - 3^{x-1} - 3^{x-2} - 3^{x-3} + \ldots$ b) $\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$. Zadanie 3. W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz zbiór tych punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają warunek: $\log_{x+1}(y-4) < 1$. Zadanie 4. Zbadaj parzystość (nieparzystość) funkcji $f(x) = \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. Zadanie 5. Rozwiąż nierówność: $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\sqrt{3}}(ctgx-1)} > 1$ w zbiorze $(0, 2\pi)$.	

2. Elementy analizy matematycznej

Tematyka zajęć:

- Powtórzenie i uzupełnienie wiadomości o granicach ciągów
- Granica funkcji w punkcie
- Obliczanie granic funkcji w punkcie
- Granice jednostronne funkcji w punkcie
- Granice funkcji w nieskończoności
- Granica niewłaściwa funkcji
- Ciągłość funkcji w punkcie
- Ciągłość funkcji w zbiorze
- Asymptoty wykresu funkcji
- Pochodna funkcji w punkcie
- Funkcja pochodna
- Styczna do wykresu funkcji
- Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji
- Ekstrema lokalne funkcji
- Największa i najmniejsza wartość funkcji w przedziale
- Badanie przebiegu zmienności funkcji
- Zadania optymalizacyjne

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi obliczać granice ciągów liczbowych; – zna i rozumie pojęcie granicy funkcji w punkcie (definicja Heinego); – potrafi, posługując się definicją Heinego granicy funkcji w punkcie, wykazać, że granicą danej funkcji w danym punkcie jest pewna liczba lub wykazać, że granica funkcji w danym punkcie nie istnieje; – zna twierdzenia dotyczące obliczania granic w punkcie; – potrafi obliczyć granicę właściwą i niewłaściwą funkcji w punkcie, korzystając z poznanych twierdzeń; – potrafi obliczyć granice jednostronne funkcji w punkcie; –potrafi obliczyć granice funkcji w nieskończoności; – zna i rozumie pojęcie funkcji ciągłej w punkcie; – potrafi zbadać ciągłość danej funkcji w danym punkcie; – zna definicję funkcji ciągłej w zbiorze; – potrafi zbadać ciągłość danej funkcji w danym zbiorze; – potrafi wyznaczyć równania asymptot pionowych, poziomych oraz ukośnych wykresu	Uczeń: – zna i potrafi stosować twierdzenie o trzech funkcjach; – potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące badania ciągłości funkcji w punkcie i w zbiorze; – zna własności funkcji ciągłych i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań (twierdzenie Darboux oraz twierdzenie Weierstrassa); – potrafi wyznaczyć równania asymptot wykresu funkcji, we wzorze której występuje wartość bezwzględna (o ile asymptoty istnieją); – potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące różniczkowalności funkcji; – zna związek pomiędzy ciągłością i różniczkowalnością funkcji; – potrafi zastosować wiadomości o stycznej do wykresu funkcji w rozwiązywaniu różnych zadań; – potrafi wyznaczyć przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji, w której wzorze występuje wartość bezwzględna; – potrafi stosować rachunek pochodnych do analizy zjawisk opisanych wzorami funkcji wymiernych; – potrafi stosować rachunek pochodnych	Uczeń: – rozwiązuje zadania o podwyższonym stopni trudności; – potrafi wyprowadzić wzory na pochodne funkcji.

funkcji wymiernej (o ile wykres ma takie asymptoty); – zna pojęcie ilorazu różnicowego funkcji; – zna i rozumie pojęcie pochodnej funkcji w punkcie; – potrafi obliczyć pochodną funkcji w punkcie na podstawie definicji; – zna i rozumie pojęcie funkcji pochodnej; – potrafi sprawnie wyznaczać pochodne funkcji wymiernych na podstawie poznanych wzorów; – potrafi zbadać, czy dana funkcja jest różniczkowalna w danym punkcie (zbiorze); – potrafi wyznaczyć równanie stycznej do wykresu danej funkcji; – potrafi zbadać monotoniczność funkcji za pomocą pochodnej; – zna i rozumie warunek konieczny i wystarczający istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej; – potrafi wyznaczyć ekstrema funkcji wymiernej; – potrafi wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość danej funkcji wymiernej w przedziale domkniętym; – potrafi zbadać przebieg zmienności danej funkcji wymiernej i naszkicować jej wykres; – potrafi stosować rachunek pochodnych do rozwiązywania prostych zadań optymalizacyjnych.	w rozwiązywaniu zadań optymalizacyjnych.	

Przykładowe zadania

Zadanie 1.
Oblicz granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2-6}{x^2-4}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+4}{5x^3-8x+1}$

Zadanie 2.

Wykaż, że nie istnieje granica funkcji $f(x) = \frac{|2x|}{3x}$,

w punkcie $x_0 = 0$.

Zadanie 3.
Zbadaj ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{dla } x \le 0 \\ 1-x & \text{dla } 0 < x \le 1 \\ \sqrt{x+2} & \text{dla } x > 1 \end{cases}.$$

Zadanie 3.

Zbadaj, czy wykres funkcji $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ ma asymptoty. Jeśli tak, to wyznacz ich równania.

Zadanie 4.
Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji

Zadanie 1.

Oblicz granicę: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{5}\cdot\sin 9x$.

Zadanie 2.

Wykaż, że równanie $\cos x - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x = 0$ ma

rozwiązanie w przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.

Zadanie 3.
Wyznacz równania wszystkich asymptot wykresu funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{|x|+4} & \text{dla } |x| \ge 2 \\ \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} & \text{dla } |x| < 2 \end{cases}.$$

Zadanie 4.
Zbadaj , czy istnieją takie wartości parametrów a i b, dla których funkcja określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+2bx & \text{dla } x \in (-\infty, 1) \\ 2x^2+ax & \text{dla } x \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$$

jest ciągła i różniczkowalna.

Zadanie 1.
Wykaż, że jeśli $x \in (0, +\infty)$, to

$x^4 - x^2 + 1 > \frac{1}{x^2+1}$.

Zadanie 2.
Wykaż, że jeśli $0 < a < b$, to

$\left(1-\frac{a}{b}\right) < \ln b - \ln a < \left(\frac{b}{a}-1\right)$.

$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ w punkcie $A(x_0, -9)$. <u>Zadanie 5.</u> Wyznacz ekstrema lokalne funkcji $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x-3}$.	<u>Zadanie 5.</u> Wyznacz przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x+\lvert 7-2x \rvert}$. <u>Zadanie 6.</u> W pewnym zakładzie produkcyjnym zależność między kosztem całkowitym produkcji K a jej wielkością x wyraża się wzorem $K(x) = x^3 + 500x + 16\,000$. Przy jakiej wielkości produkcji koszt przypadający na jednostkę wytworzonego produktu jest najmniejszy?	

3. Geometria analityczna

Tematyka zajęć:

- Wektor w układzie współrzędnych. Współrzędne środka odcinka
- Kąt między niezerowymi wektorami
- Równanie kierunkowe prostej
- Równanie ogólne prostej
- Kąt między prostymi
- Odległość punktu od prostej. Odległość między dwiema prostymi równoległymi
- Pole trójkąta. Pole wielokąta
- Równanie okręgu. Nierówność opisująca koło
- Wzajemne położenie prostej i okręgu. Styczna do okręgu
- Wzajemne położenie dwóch okręgów
- Jednokładność. Jednokładność w układzie współrzędnych
- Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązaniach zadań z geometrii analitycznej

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – stosuje informacje zdobyte w klasie pierwszej, dotyczące wektora w układzie współrzędnych, w rozwiązywaniu zadań; – potrafi wyznaczyć współrzędne środka odcinka; – potrafi obliczyć długość odcinka, znając współrzędne jego końców; – zna definicję kąta utworzonego przez dwa niezerowe wektory; – zna i potrafi stosować w zadaniach wzory na cosinus i sinus kąta utworzonego przez dwa niezerowe wektory; – zna warunki na prostopadłość i równoległość wektorów i potrafi je zastosować w zadaniach; – zna definicję równania kierunkowego prostej oraz znaczenie współczynników występujących w tym równaniu; – potrafi napisać równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez dwa dane punkty oraz równanie kierunkowe prostej, znając jej kąt nachylenia do osi *OX* i współrzędne punktu, który do należy tej prostej; – zna definicję równania ogólnego prostej; – potrafi napisać równanie ogólne prostej przechodzącej przez dwa punkty; – zna i potrafi stosować w zadaniach warunek na równoległość oraz prostopadłość prostych	Uczeń: – rozwiązuje zadania, dotyczące wektorów, w których występują parametry; – rozwiązuje zadania z geometrii analitycznej (o średnim stopniu trudności), w rozwiązaniach których sprawnie korzysta z poznanych wzorów; – potrafi rozwiązywać różne zadania dotyczące okręgów i kół w układzie współrzędnych, w których konieczne jest zastosowanie wiadomości z różnych działów matematyki; – potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące okręgów i kół w układzie współrzędnych.; – stosuje rachunek pochodnych w rozwiązaniach zadań z geometrii analitycznej.	Uczeń: – potrafi wyprowadzić wzory na sinus i cosinus kąta utworzonego przez dwa niezerowe wektory; – potrafi wyprowadzić wzory na tangens kąta utworzonego przez dwie proste dane równaniami kierunkowym (ogólnymi); – potrafi wyprowadzić wzór na odległość punktu od prostej; – potrafi rozwiązywać zadania z geometrii analitycznej o podwyższonym stopniu trudności .

danych równaniami kierunkowymi (ogólnymi); – potrafi obliczyć (korzystając z poznanych wzorów) miarę kąta, jaki tworzą dwie proste przecinające się; – zna i potrafi stosować w zadaniach, wzór na odległość punktu od prostej; – potrafi obliczyć odległość między dwiema prostymi równoległymi: – potrafi obliczyć pole trójkąta oraz dowolnego wielokąta, gdy dane są współrzędne jego wierzchołków; – rozpoznaje równanie okręgu w postaci zredukowanej oraz w postaci kanonicznej; – potrafi sprowadzić równanie okręgu z postaci zredukowanej do postaci kanonicznej (i odwrotnie); – potrafi odczytać z równania okręgu współrzędne środka i promień okręgu; – potrafi napisać równanie okręgu, gdy zna współrzędne środka i promień tego okręgu; – rozpoznaje nierówność opisującą koło; – potrafi odczytać z nierówności opisującej koło współrzędne środka i promień tego koła; – potrafi napisać nierówność opisującą koło w sytuacji, gdy zna współrzędne środka i promień koła; – potrafi narysować w układzie współrzędnych okrąg na podstawie danego równania opisującego okrąg; – potrafi narysować w układzie współrzędnych		

koło na podstawie danej nierówności opisującej koło; – potrafi określić wzajemne położenie prostej o danym równaniu względem okręgu o danym równaniu (po wykonaniu stosownych obliczeń); – potrafi określić wzajemne położenie dwóch okręgów danych równaniami (na podstawie stosownych obliczeń); – potrafi obliczyć współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu lub stwierdzić, że prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych; – potrafi obliczyć współrzędne punktów wspólnych dwóch okręgów (lub stwierdzić, że okręgi nie przecinają się), gdy znane są równania tych okręgów; – potrafi wyznaczyć równanie stycznej do okręgu; – potrafi napisać równanie okręgu opisanego na trójkącie, gdy dane ma współrzędne wierzchołków trójkąta; – potrafi rozwiązywać proste zadania z wykorzystaniem wiadomości o prostych, trójkątach, parabolach i okręgach; – zna pojęcie jednokładności o środku S i skali $k \neq 0$ (także w ujęciu analitycznym); – zna własności figur jednokładnych; – potrafi rozwiązywać proste zadania z zastosowaniem jednokładności.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Oblicz sumę sinusów kątów wewnętrznych trójkąta o wierzchołkach $A(1, -4)$, $B(6, 3)$, $C(2, 5)$. Zadanie 2. Prosta k jest nachylona do osi OX pod kątem $\alpha = 60°$ i przechodzi przez punkt $A(5, 3)$. Napisz równanie ogólne i kierunkowe tej prostej. Zadanie 3. Dany jest czworokąt $ABCD$, gdzie $A(2, 1)$, $B(6,-2)$, $C(4, 3)$, $D(0, 8)$. a) Oblicz pole tego czworokąta. b) Oblicz odległość wierzchołka B od boku AD. c) Oblicz miarę kąta ostrego, jaki tworzą przekątne tego czworokąta (wynik podaj z dokładnością do 1°). Zadanie 4. Dany jest trójkąt ABC, gdzie $A(1, 5)$, $B(8, -2)$, C(9, 1). a) Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$, który jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności o środku $S(1, 3)$ i skali $k = -2$. b) Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie $A'B'C'$.	Zadanie 1. Dane są wektory $\vec{u} = [-5, 3]$, $\vec{v} = [2, -1]$, $\vec{p} = [1, 4]$. Wykaż, że jeśli wektory $\vec{u} + a \cdot \vec{v}$ *oraz* $\vec{p}$ są prostopadłe, to $a = 3{,}5$. Zadanie 2. Wyznacz równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P(-5, 16)$, która tworzy z osią odciętych kąt o mierze dwa razy większej od kąta, jaki tworzy z tą osią prosta k o równaniu $y = \frac{2}{3}x - 1$. Zadanie 3. Wyznacz równanie zbioru środków wszystkich okręgów stycznych do prostej k: $y = 0$ i jednocześnie stycznych zewnętrznie do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 4x$. Zadanie 4. Dla jakich wartości parametru m ($m \in \boldsymbol{R}$) okręgi opisane równaniami o_1: $(x - m)^2 + (y + 2)^2 = 20$ oraz o_2: $(x + 1)^2 + (y - 2m)^2 = 5$ są wewnętrznie styczne? Dla znalezionych wartości parametrów wykonaj rysunek. Oblicz współrzędne punktu styczności. Zadanie 5. Wykres funkcji $y = \|x - 2\|$ przecina okrąg	Zadanie 1. Przez punkt $A = (0, 1)$ poprowadzono styczne do okręgu $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$. Znajdź równanie krzywej, którą tworzą środki wszystkich cięciw danego okręgu wyznaczonych przez proste przechodzące przez punkt A.

<u>Zadanie 5.</u> Określ wzajemne położenie prostej k: $y = \frac{1}{2}x$ względem okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 6x = 0$. <u>Zadanie 6.</u> Napisz równania stycznych do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ przechodzących przez punkt $A(-4, 3)$.	o równaniu $x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$ w punktach A i B. a) Oblicz współrzędne punktów A i B. b) Wykaż, że trójkąt ABC, gdzie S jest środkiem okręgu, jest prostokątny. c) Oblicz pole figury $F = F_1 \cap F_2$, gdzie $F_1 = \{(x, y): x \in \boldsymbol{R} \wedge y \in \boldsymbol{R} \wedge x^2 + y^2 - 4x - 4 \leq 0\}$, a $F_2 = \{(x, y): x \in \boldsymbol{R} \wedge y \in \boldsymbol{R} \wedge y \leq \lvert x - 2 \rvert\}$. <u>Zadanie 6.</u> Na gałęzi hiperboli o równaniu $f(x) = \frac{4}{x}$, gdzie $x \in (0, +\infty)$, wyznacz współrzędne takiego punktu P, którego odległość od punktu $A(-3, 3)$ jest najmniejsza.	

4. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

Tematyka zajęć:

- Reguła mnożenia i reguła dodawania
- Wariacje
- Permutacje
- Kombinacje
- Kombinatoryka – zadania różne
- Doświadczenie losowe
- Zdarzenia. Działania na zdarzeniach
- Określenie prawdopodobieństwa
- Prawdopodobieństwo klasyczne
- Doświadczenia losowe wieloetapowe
- Prawdopodobieństwo warunkowe
- Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym
- Niezależność zdarzeń

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna regułę dodawania oraz regułę mnożenia; – zna pojęcie permutacji zbioru i umie stosować wzór na liczbę permutacji; – zna pojęcie wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń i umie stosować wzory na liczbę takich wariacji; – zna pojęcie kombinacji i umie stosować wzór na liczbę kombinacji; – umie rozwiązywać proste zadania kombinatoryczne z zastosowaniem poznanych wzorów; – zna terminy: doświadczenie losowe, zdarzenie elementarne, przestrzeń zdarzeń elementarnych, zdarzenie, zdarzenie pewne zdarzenie niemożliwe, zdarzenia wykluczające się; – potrafi określić zbiór wszystkich zdarzeń danego doświadczenia losowego, obliczyć jego moc oraz obliczyć liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających danemu zdarzeniu; – potrafi stosować klasyczną definicję prawdopodobieństwa w rozwiązaniach zadań; – zna i rozumie aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa; – zna własności prawdopodobieństwa i umie je stosować w rozwiązaniach prostych zadań; – rozwiązuje zadania za pomocą drzewa	Uczeń: – umie rozwiązywać zadania kombinatoryczne o średnim stopniu trudności; – umie udowodnić własności prawdopodobieństwa; – umie stosować własności prawdopodobieństwa do rozwiązywania zadań „teoretycznych”; – zna i potrafi stosować wzór Bayesa; – wie i rozumie na czym polega niezależność n zdarzeń ($n \geq 2$).	Uczeń: – potrafi udowodnić, że prawdopodobieństwo warunkowe spełnia warunki aksjomatycznej definicji prawdopodobieństwa; – potrafi udowodnić wzór na prawdopodobieństwo całkowite; – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania dotyczące kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa.

stochastycznego; – zna określenie prawdopodobieństwa warunkowego i umie rozwiązywać proste zadania dotyczące takiego prawdopodobieństwa; – zna wzór na prawdopodobieństwo całkowite i potrafi go stosować w rozwiązaniach prostych zadań; – wie, jakie zdarzenia nazywamy niezależnymi; potrafi zbadać, posługując się definicją, czy dwa zdarzenia są niezależne; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące niezależności zdarzeń.		
Przykładowe zadania		
Zadanie 1. a) Ile jest liczb sześciocyfrowych, w których suma cyfr jest równa 4? b) Ile różnych kodów można otrzymać, przestawiając litery wyrazu KATASTROFA. Zadanie 2. Z grupy 6 kobiet i 8 mężczyzn wybieramy losowo cztery osoby. Ile jest takich sposobów wyboru, aby wśród wybranych osób: a) były same kobiety, b) były dwie kobiety i dwóch mężczyzn? Zadanie 3.	Zadanie 1. W przedziale wagonu kolejowego są ustawione naprzeciw siebie dwie ławki. Każda ma 5 numerowanych miejsc. Do przedziału weszło pięć osób. Trzy osoby siadły na jednej ławce, pozostałe – na drugiej, naprzeciwko dwóch osób z pierwszej ławki. Ile jest takich rozmieszczeń osób w przedziale? Zadanie 2. Ile jest funkcji ściśle monotonicznych przekształcających zbiór k – elementowy w zbiór n – elementowy ($k \le n$)?	Zadanie 1. Ile rozwiązań ma równanie $x + y + z + t = 25$ a) w zbiorze liczb naturalnych dodatnich; b) w zbiorze liczb naturalnych?

<table>
<tr>
<td>Sześcian pomalowano, a następnie rozcięto na 1000 jednakowych sześcianików, które wrzucono do pudełka i wymieszano. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania z tego pudełka jednego sześcianika, który:
a) będzie miał dwie ściany pomalowane,
b) będzie miał jedną ścianę lub dwie ściany pomalowane.

<u>Zadanie 4.</u>
Na stu mężczyzn – pięciu, a na tysiąc kobiet – dwie, to daltoniści. Z grupy, w której stosunek liczby kobiet do liczby mężczyzn wynosi 3 : 7, wylosowano jedna osobę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to daltonista?

<u>Zadanie 5.</u>
Rzucamy dwiema kostkami do gry. Czy niezależne są następujące zdarzenia:
A – na obu kostkach wypadła nieparzysta liczba oczek,
B – na drugiej kostce wypadła liczba oczek podzielna przez trzy?</td>
<td><u>Zadanie 3.</u>
Wykaż, że jeśli $P(A) = 0,25$ i $P(B) = \frac{1}{3}$, to
$\frac{1}{3} \leq P(A \cup B) \leq \frac{7}{12}$ oraz $P(A \cap B) \leq \frac{1}{4}$.

<u>Zadanie 4.</u>
Ze zbioru liczb {1, 2, 3, 4, …, 18, 19, 20} losujemy trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma tych liczb jest podzielna przez 3, jeśli wiadomo, że co najmniej jedna z tych liczb przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

<u>Zadanie 5.</u>
Do sklepu dostarczają żarówki energooszczędne dwa zakłady, będące częściami tej samej firmy, przy czym pierwszy z nich dostarcza trzy razy więcej żarówek niż drugi. W pierwszym z tych zakładów mają wady średnio 3 żarówki na 1000 wyprodukowanych, a w drugim 7 na 1000 wyprodukowanych. Klient kupił żarówkę, na której widniał tylko znak firmy, a nie zakładu, który ją wyprodukował. Żarówka ta w okresie gwarancji zepsuła się. Do którego zakładu sklep raczej powinien się zwrócić z reklamacją?</td>
<td></td>
</tr>
</table>

5. Elementy statystyki opisowej.

Tematyka zajęć:

- Podstawowe pojęcia statystyki. Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej
- Średnia z próby
- Mediana z próby i moda z próby
- Wariancja i odchylenie standardowe

•

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – zna podstawowe pojęcia statystyki opisowej: obserwacja statystyczna, populacja generalna, próba, liczebność próby, cecha statystyczna (mierzalna, niemierzalna) itp.; – potrafi odczytywać dane statystyczne z tabel, diagramów i wykresów oraz interpretować te dane; – potrafi określać zależności między odczytanymi danymi; – potrafi przedstawiać dane empiryczne w postaci tabel, diagramów i wykresów; – potrafi obliczać średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe z próby; – potrafi interpretować wymienione wyżej parametry statystyczne.	Uczeń: – potrafi rozwiązywać zadania ze statystyki opisowej o średnim stopniu trudności.	

Przykładowe zadania

<u>Zadanie 1.</u> Pięćdziesiąt osób zdawało egzamin z przepisów ruchu drogowego. Liczba popełnionych przez nie błędów przedstawiona jest w poniższej tabeli: Liczba błędów: 0, 1, 2, 3, 4, 5 Liczba osób: 11, 8, 14, 7, 6, 4	<u>Zadanie 1.</u> W klasie IIIa liczącej 28 osób z ostatniego sprawdzianu z matematyki było 13 ocen dopuszczających, a pozostałe oceny to dostateczne i dobre. Średnia ocen ze sprawdzianu wyniosła 2,75. Oblicz: a) liczbę ocen dobrych i dostatecznych ze	

a) Oblicz średnią liczbę błędów popełnionych przez zdającego.
b) Ile procent zdających zdało egzamin, jeśli można było popełnić co najwyżej dwa błędy?
c) Przedstaw dane na diagramie kolumnowym i zaznacz na nim średnią obliczoną w punkcie a).

<u>Zadanie 2.</u>
Wyznacz modę i medianę zestawu danych:
3, 2, 2, 5, 4, 5, 1, 2, 6, 8.

<u>Zadanie 3.</u>
Producent czekolady deklaruje, że tabliczka ma wagę 150 g $\pm$ 2 g. Dla zbadania jakości pewnej partii czekolady organizacja konsumencka zbadała wagę losowo wybranych 10 tabliczek czekolady z tej partii i otrzymała następującą ich wagę (w gramach):
150,4 148,9 150,1 152,8 146,6 154,3 150,8 151,1 150,6 149,5
Oblicz średnią wagę tabliczki czekolady i odchylenie standardowe w badanej próbie.
Zastanów się, czy organizacja konsumencka powinna zwrócić się do producenta z reklamacją dotyczącą tej partii tabliczek czekolady.

sprawdzianu;
b) odchylenie standardowe od średniej ocen; wynik podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.

<u>Zadanie 2.</u>
Wiadomo, że wariancję zestawu danych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ możemy obliczyć ze wzoru:

$$(1)\quad \sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots.. + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

lub ze wzoru

$$(2)\quad \sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots.. + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2,$$

gdzie $\bar{x}$ jest średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Wykaż, że wzory (1) i (2) są równoważne.

6. Geometria przestrzenna

Tematyka zajęć:

- Płaszczyzny i proste w przestrzeni
- Rzut równoległy na płaszczyznę. Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę
- Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni
- Rzut prostokątny na płaszczyznę
- Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych
- Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny
- Graniastosłupy
- Ostrosłupy
- Siatka wielościanu. Pole powierzchni wielościanu
- Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów
- Przekroje wielościanów. Konstrukcje
- Przekroje wielościanów – zadania
- Bryły obrotowe. Pole powierzchni brył obrotowych
- Objętość brył obrotowych
- Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii przestrzennej

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi określić położenie dwóch płaszczyzn w przestrzeni; – potrafi określić położenie prostej i płaszczyzny w przestrzeni; – potrafi określić położenie dwóch prostych w przestrzeni; – rysuje figury płaskie w rzucie równoległym na płaszczyznę; – umie scharakteryzować prostopadłość prostej i płaszczyzny; – umie scharakteryzować prostopadłość dwóch płaszczyzn; – rozumie pojęcie odległości punktu od płaszczyzny oraz odległości prostej równoległej do płaszczyzny od tej płaszczyzny; – zna i potrafi stosować twierdzenie o trzech prostych prostopadłych; – rozumie pojęcie kąta miedzy prostą i płaszczyzną; – rozumie pojęcie kąta dwuściennego, poprawnie posługuje się terminem “kąt liniowy kąta dwuściennego”; – zna określenie graniastosłupa; umie wskazać: podstawy, ściany boczne, krawędzie podstaw, krawędzie boczne, wysokość graniastosłupa; – zna podział graniastosłupów;	Uczeń: – potrafi wyznaczać przekroje wielościanów; – określa, jaką figurą jest dany przekrój sfery płaszczyzną; – potrafi obliczyć pole powierzchni przekroju bryły daną płaszczyzną (graniastosłupa, ostrosłupa, walca, stożka, kuli); – potrafi rozwiązywać zadania, w których jedna bryła jest wpisana w drugą lub opisana na niej (ostrosłup wpisany w kulę; kula wpisana w stożek, ostrosłup opisany na kuli, walec wpisany w stożek itp.); – potrafi stosować twierdzenie o objętości brył podobnych w rozwiązaniach prostych zadań; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne dotyczące brył o średnim stopniu trudności, z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń z planimetrii oraz trygonometrii; – wykorzystuje wiadomości z analizy matematycznej w rozwiązaniach zadań ze stereometrii.	Uczeń: – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne dotyczące brył, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń.

– umie narysować siatki graniastosłupów prostych; – zna określenie ostrosłupa; umie wskazać: podstawę, ściany boczne, krawędzie podstaw, krawędzie boczne, wysokość ostrosłupa; – zna podział ostrosłupów; – umie narysować siatki ostrosłupów prostych; – potrafi rozpoznać w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi itp.) oraz obliczyć miary tych kątów; – potrafi rozpoznać w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami (kąty między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami) oraz obliczyć miary tych kątów; – potrafi rozpoznać w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między ścianami oraz obliczyć miarę tego kąta; – zna określenie walca; umie wskazać: podstawy, powierzchnię boczną, tworzącą, oś obrotu walca; – rozumie określenie “przekrój osiowy walca”; – zna określenie stożka; umie wskazać: podstawę, powierzchnię boczną, tworzącą, wysokość, oś obrotu stożka; – rozpoznaje w walcach i stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą) oraz oblicza miary tych kątów; – zna określenie kuli;		

– rozumie pojęcie objętości bryły; – umie obliczyć objętość i pole powierzchni poznanych graniastosłupów; – umie obliczyć objętość i pole powierzchni poznanych ostrosłupów; – umie obliczyć objętość i pole powierzchni brył obrotowych (stożka, kuli, walca); – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące brył, w tym z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych wcześniej twierdzeń z geometrii płaskiej.		

Przykładowe zadania

Zadanie 1. Przez punkty A, B leżące poza płaszczyzną π, poprowadzono proste prostopadłe do tej płaszczyzny przebijające ją odpowiednio w punktach A' i B'. Wiedząc, że $\lvert AA' \rvert = 80$ cm, $\lvert BB' \rvert = 60$ cm, oblicz odległość środka odcinka AB od płaszczyzny π. Zadanie 2. Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok, którego pole wynosi 16 cm^2, a kąt ostry ma miarę $\frac{\pi}{6}$. Pola ścian bocznych tego graniastosłupa są równe odpowiednio 24 cm^2 i 48 cm^2. Oblicz objętość graniastosłupa.	Zadanie 1. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o polu równym 1 m^2. Dwie ściany boczne są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, a dwie pozostałe tworzą z nią kąty o miarach odpowiednio 30° i 60°. Oblicz objętość ostrosłupa. Zadanie 2. Długość krawędzi sześcianu jest równa 10 cm. Sześcian ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz pole otrzymanego przekroju. Zadanie 3. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt płaski	Zadanie 1. Przez końce trzech krawędzi równoległościanu schodzących się w jednym wierzchołku poprowadzono płaszczyznę. Udowodnij, że dzieli ona w stosunku 1 : 2 przekątną równoległościanu wychodzącą z tego samego wierzchołka.

Zadanie 3. Wysokość czworościanu foremnego ma długość *H*. Oblicz długość krawędzi tego czworościanu. Zadanie 4. Trapez prostokątny obraca się wokół boku tworzącego z podstawami kąty proste. Podstawy trapezu mają długość odpowiednio 10 cm i 7 cm. Pole trapezu wynosi 68 cm^2. Oblicz objętość otrzymanej bryły obrotowej.	przy wierzchołku ściany bocznej ma miarę α, zaś kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę β. Wykaż, że $\cos\beta = \dfrac{\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. Zadanie 4. Na kuli o promieniu *R* opisano stożek obrotowy o najmniejszej objętości. Oblicz stosunek objętości tego stożka do objętości kuli.	