

PLAN WYNIKOWY

(zakres rozszerzony)

klasa 3.

Wstęp

Plan wynikowy kształcenia matematycznego jest dostosowany do programu nauczania matematyki w liceach i technikach – zakres rozszerzony, autorstwa Marcina Kurczaba, Elżbiety Kurczab i Elżbiety Świdy, zamieszczonego na stronie internetowej www.pazdro.com.pl wiosną 2012 roku. Jest on przeznaczony dla nauczycieli oraz uczniów pracujących z podręcznikiem „Matematyka. Podręcznik do liceów i techników. Zakres rozszerzony” – numer ewidencyjny w wykazie podręczników: 563/3/2014 oraz zbiorami zadań do matematyki, autorstwa Elżbiety Kurczab, Marcina Kurczaba i Elżbiety Świdy, wydanymi przez Oficynę Edukacyjną * Krzysztof Pazdro.

Plan jest wykazem wiadomości i umiejętności, jakie powinien mieć uczeń ubiegający się o określone oceny na poszczególnych etapach edukacji w liceum lub w technikum.

Wymagania stawiane przed uczniem podzieliliśmy na trzy grupy:

- Wymagania podstawowe (zawierają wymagania konieczne);
- Wymagania dopełniające (zawierają wymagania rozszerzające);
- Wymagania wykraczające.

Wymagania wykraczające zawierają w sobie wymagania dopełniające, te zaś zawierają wymagania podstawowe.

Ocenę dopuszczającą powinien otrzymać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące 40–60% wymagań podstawowych, zaś ocenę dostateczną – uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące powyżej 60% wymagań podstawowych.

Ocenę dobrą powinien otrzymać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące do 75% wymagań dopełniających, zaś ocenę bardzo dobrą – uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności stanowiące powyżej 75% wymagań dopełniających.

Ocenę celującą powinien uzyskać uczeń, który opanował wiedzę i zdobył umiejętności zawarte w wymaganiach wykraczających.

Aby ułatwić nauczycielom, uczniom i ich rodzicom korzystanie z planu wynikowego, dla poszczególnych wymagań przedstawiamy przykładowe zadania, które dokładniej określają stopień trudności problemów wymaganych na poszczególne oceny. Przedstawione zadania **nie mogą** w żadnym wypadku stanowić przykładowego zbioru zadań, z którego nauczyciel powinien czerpać zadania na ewentualny egzamin sprawdzający, lecz mają jedynie wskazać stopień trudności zadań na poszczególne oceny.

Plan wynikowy nie może być „dokumentem sztywnym”. Zakładamy, że każdy nauczyciel zmodyfikuje ten plan, dostosowując go zarówno do liczby godzin przeznaczonych na realizację materiału, jak i do możliwości uczniów.

Nauczycieli, którzy będą korzystać z przygotowanego przez nas planu wynikowego, prosimy o wskazówki i uwagi.

Autorzy

Spis treści

1. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna	4
2. Elementy analizy matematycznej	8
3. Geometria analityczna	13
4. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa	19
5. Elementy statystyki opisowej	23
6. Geometria przestrzenna	26

1. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

Tematyka zajęć:

- Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie
- Funkcja wykładnicza i jej własności
- Przekształcenia wykresu funkcji wykładniczej. Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem wykresów funkcji wykładniczych
- Równania wykładnicze
- Nierówności wykładnicze
- Zastosowanie równań i nierówności wykładniczych w rozwiązywaniu zadań
- Logarytm – powtórzenie wiadomości
- Funkcja logarytmiczna i jej własności
- Przekształcenia wykresu funkcji logarytmicznej
- Rozwiązywanie równań, nierówności oraz układów równań z zastosowaniem wykresu funkcji logarytmicznej
- Równania logarytmiczne
- Nierówności logarytmiczne
- Równania i nierówności logarytmiczno-wykładniczo-potęgowe
- Zastosowanie równań i nierówności logarytmicznych w rozwiązywaniu zadań
- Zastosowanie funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
Uczeń: – potrafi sprawnie wykonywać działania na potęgach o wykładniku rzeczywistym; – stosuje własności działań na potęgach w rozwiązywaniu zadań; – zna definicję funkcji wykładniczej; – potrafi odróżnić funkcję wykładniczą od innych	Uczeń: – potrafi szkicować wykresy funkcji wykładniczych z wartością bezwzględną; – potrafi szkicować wykresy funkcji logarytmicznych z wartością bezwzględną; – potrafi interpretować graficznie równania wykładnicze z parametrem;	Uczeń: – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze z parametrem; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności logarytmiczne z parametrem;

<ul style="list-style-type: none"> – funkcji; – potrafi szkicować wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw; – potrafi opisać własności funkcji wykładniczej na podstawie jej wykresu; – potrafi przekształcać wykresy funkcji wykładniczych (S_{Ox}, S_{Oy}, $S_{(0,0)}$, przesunięcie równoległe o dany wektor); – potrafi rozwiązywać graficznie równania, nierówności oraz układy równań z zastosowaniem wykresów funkcji wykładniczych; – zna pojęcie równania wykładniczego oraz nierówności wykładniczej; – potrafi rozwiązywać algebraicznie i graficznie proste równania oraz nierówności wykładnicze; – potrafi obliczyć logarytm liczby dodatniej; – zna i potrafi stosować własności logarytmów do obliczania wartości wyrażeń; – zna definicję funkcji logarytmicznej; – potrafi odróżnić funkcję logarytmiczną od innej funkcji; – potrafi określić dziedzinę funkcji logarytmicznej; – potrafi szkicować wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw; – potrafi opisać własności funkcji logarytmicznej na podstawie jej wykresu; – potrafi przekształcać wykresy funkcji logarytmicznych (S_{Ox}, S_{Oy}, $S_{(0,0)}$, przesunięcie równoległe o dany wektor); 	<ul style="list-style-type: none"> – potrafi interpretować graficznie równania logarytmiczne z parametrem; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne; – potrafi rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze oraz logarytmiczne z wartością bezwzględną; – potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wykładniczych oraz logarytmicznych; – potrafi rozwiązywać równania wykładniczo-potęgowo-logarytmiczne; – potrafi dowodzić własności logarytmów; – potrafi naszkicować zbiór punktów płaszczyzny spełniających dane równanie lub nierówność z dwiema niewiadomymi, w których występują logarytmy; – potrafi badać, na podstawie definicji, własności funkcji wykładniczych i logarytmicznych (np. parzystość, nieparzystość, monotoniczność); – potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie (o średnim stopniu trudności), w których wykorzystuje wiadomości dotyczące funkcji wykładniczej i logarytmicznej; – potrafi stosować wiadomości o funkcji wykładniczej i logarytmicznej w różnych zadaniach (np. dotyczących ciągów, szeregów, trygonometrii, itp.). 	<ul style="list-style-type: none"> – potrafi rozwiązywać zadania na dowodzenie (o podwyższonym stopniu trudności), w których wykorzystuje własności funkcji wykładniczych i logarytmicznych.
---	---	---

<p>– potrafi graficznie rozwiązywać równania, nierówności oraz układy równań z zastosowaniem wykresów funkcji logarytmicznych;</p> <p>– potrafi algebraicznie rozwiązywać proste równania oraz nierówności logarytmiczne;</p> <p>– rozwiązuje zadania tekstowe osadzone w kontekście praktycznym, w których wykorzystuje umiejętność rozwiązywania prostych równań i nierówności wykładniczych oraz logarytmicznych (lokaty bankowe, rozpad substancji promieniotwórczych itp.)</p> <p>– posługuje się funkcjami wykładniczymi oraz funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych itp.</p>		
---	--	--

Przykładowe zadania

<p><u>Zadanie 1.</u> Wykaż, że jeśli $a = \log_{45} 3$ to $\log_3 5 = \frac{1-2a}{a}$.</p> <p><u>Zadanie 2.</u> a) Rozwiąż graficznie równanie $3^x - 1 = -2x^2 + 4x$. b) Rozwiąż nierówność $\log_{\frac{1}{4}} \frac{3}{x-1} > \log_{\frac{1}{4}} \frac{2}{x+1}$. c) Rozwiąż równanie $\log(x+3) - \log 0,4 = 2\log(x-2)$.</p>	<p><u>Zadanie 1.</u> a) Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \left \log_2 \frac{x-2}{x^2-4} \right$. b) Naszkicuj wykres funkcji f. c) Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m, dla których równanie $\left \log_2 \frac{x-2}{x^2-4} \right = m^2 - 2$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.</p> <p><u>Zadanie 2.</u> Rozwiąż równanie i nierówność:</p>	<p><u>Zadanie 1.</u> Wyznacz wszystkie wartości parametru m, $m \in \mathbf{R}$, dla których równanie $\log[(m+4)x] = \log(x^2 + 2x)$ ma tylko jedno rozwiązanie, które jest liczbą ujemną.</p> <p><u>Zadanie 2.</u> Wykaż, że $\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 \geq 4,4$.</p>
--	---	--

<p><u>Zadanie 3.</u> Określ dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{x^2-1}(x^2 - 2x - 3)$.</p> <p><u>Zadanie 4.</u> Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 1 - \log_2(x+3)$ i na jego podstawie omów własności funkcji f.</p> <p><u>Zadanie 5.</u> Pan Kowalski złożył w banku pewną kwotę K_0 [zł] na procent składany w wysokości 4% rocznie przy kapitalizacji kwartalnej. Oblicz, po ilu latach kwota ta podwoi się. Uwzględnij 18% podatek od odsetek.</p>	<p>a) $\frac{1}{4}\sqrt{12-3^{x+1}} = 3^x - 3^{x-1} - 3^{x-2} - 3^{x-3} + \dots$</p> <p>b) $\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$.</p> <p><u>Zadanie 3.</u> W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz zbiór tych punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają warunek: $\log_{x+1}(y-4) < 1$.</p> <p><u>Zadanie 4.</u> Zbadaj parzystość (nieparzystość) funkcji $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$.</p> <p><u>Zadanie 5.</u> Rozwiąż nierówność: $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\sqrt{3}}(\operatorname{ctg}x-1)} > 1$ w zbiorze $(0, 2\pi)$.</p>	
---	---	--

2. Elementy analizy matematycznej

Tematyka zajęć:

- Powtórzenie i uzupełnienie wiadomości o granicach ciągów
- Granica funkcji w punkcie
- Obliczanie granic funkcji w punkcie
- Granice jednostronne funkcji w punkcie
- Granice funkcji w nieskończoności
- Granica niewłaściwa funkcji
- Ciągłość funkcji w punkcie
- Ciągłość funkcji w zbiorze
- Asymptoty wykresu funkcji
- Pochodna funkcji w punkcie
- Funkcja pochodna
- Styczna do wykresu funkcji
- Pochodna funkcji a monotoniczność funkcji
- Ekstrema lokalne funkcji
- Największa i najmniejsza wartość funkcji w przedziale
- Badanie przebiegu zmienności funkcji
- Zadania optymalizacyjne

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> – potrafi obliczać granice ciągów liczbowych; – zna i rozumie pojęcie granicy funkcji w punkcie (definicja Heinego); – potrafi, posługując się definicją Heinego granicy funkcji w punkcie, wykazać, że granicą danej funkcji w danym punkcie jest pewna liczba lub wykazać, że granica funkcji w danym punkcie nie istnieje; – zna twierdzenia dotyczące obliczania granic w punkcie; – potrafi obliczyć granicę właściwą i niewłaściwą funkcji w punkcie, korzystając z poznanych twierdzeń; – potrafi obliczyć granice jednostronne funkcji w punkcie; – potrafi obliczyć granice funkcji w nieskończoności; – zna i rozumie pojęcie funkcji ciągłej w punkcie; – potrafi zbadać ciągłość danej funkcji w danym punkcie; – zna definicję funkcji ciągłej w zbiorze; – potrafi zbadać ciągłość danej funkcji w danym zbiorze; – potrafi wyznaczyć równania asymptot pionowych, poziomych oraz ukośnych wykresu funkcji wymiernej (o ile wykres ma takie asymptoty); 	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> – zna i potrafi stosować twierdzenie o trzech funkcjach; – potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące badania ciągłości funkcji w punkcie i w zbiorze; – zna własności funkcji ciągłych i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań (twierdzenie Darboux oraz twierdzenie Weierstrassa); – potrafi wyznaczyć równania asymptot wykresu funkcji, we wzorze której występuje wartość bezwzględna (o ile asymptoty istnieją); – potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące różniczkowalności funkcji; – zna związek pomiędzy ciągłością i różniczkowalnością funkcji; – potrafi zastosować wiadomości o stycznej do wykresu funkcji w rozwiązywaniu różnych zadań; – potrafi wyznaczyć przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji, w której wzorze występuje wartość bezwzględna; – potrafi stosować rachunek pochodnych do analizy zjawisk opisanych wzorami funkcji wymiernych; – potrafi stosować rachunek pochodnych w rozwiązywaniu zadań optymalizacyjnych. 	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> – rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności; – potrafi wyprowadzić wzory na pochodne funkcji.

<ul style="list-style-type: none"> – zna pojęcie ilorazu różnicowego funkcji; – zna i rozumie pojęcie pochodnej funkcji w punkcie; – potrafi obliczyć pochodną funkcji w punkcie na podstawie definicji; – zna i rozumie pojęcie funkcji pochodnej; – potrafi sprawnie wyznaczać pochodne funkcji wymiernych na podstawie poznanych wzorów; – potrafi zbadać, czy dana funkcja jest różniczkowalna w danym punkcie (zbiornie); – potrafi wyznaczyć równanie stycznej do wykresu danej funkcji; – potrafi zbadać monotoniczność funkcji za pomocą pochodnej; – zna i rozumie warunek konieczny i wystarczający istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej; – potrafi wyznaczyć ekstrema funkcji wymiernej; – potrafi wyznaczyć najmniejszą oraz największą wartość danej funkcji wymiernej w przedziale domkniętym; – potrafi zbadać przebieg zmienności danej funkcji wymiernej i naszkicować jej wykres; – potrafi stosować rachunek pochodnych do rozwiązywania prostych zadań optymalizacyjnych. 		
---	--	--

Przykładowe zadania

Zadanie 1.

Oblicz granice funkcji:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 6}{x^2 - 4}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 4}{5x^3 - 8x + 1}$

Zadanie 2.

Wykaż, że nie istnieje granica funkcji $f(x) = \frac{|2x|}{3x}$,

w punkcie $x_0 = 0$.

Zadanie 3.

Zbadaj ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{dla } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{dla } 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{x+2} & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

Zadanie 3.

Zbadaj, czy wykres funkcji $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ ma asymptoty. Jeśli tak, to wyznacz ich równania.

Zadanie 4.

Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji

Zadanie 1.

Oblicz granicę: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5} \cdot \sin 9x$.

Zadanie 2.

Wykaż, że równanie $\cos x - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x = 0$ ma rozwiązanie w przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Zadanie 3.

Wyznacz równania wszystkich asymptot wykresu funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{|x|+4} & \text{dla } |x| \geq 2 \\ \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} & \text{dla } |x| < 2 \end{cases}$$

Zadanie 4.

Zbadaj, czy istnieją takie wartości parametrów a i b , dla których funkcja określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2bx & \text{dla } x \in (-\infty, 1) \\ 2x^2 + ax & \text{dla } x \in \langle 1, +\infty \rangle \end{cases}$$

jest ciągła i różniczkowalna.

Zadanie 1.

Wykaż, że jeśli $x \in (0, +\infty)$, to $x^4 - x^2 + 1 > \frac{1}{x^2 + 1}$.

Zadanie 2.

Wykaż, że jeśli $0 < a < b$, to $\left(1 - \frac{a}{b}\right) < \ln b - \ln a < \left(\frac{b}{a} - 1\right)$.

<p>$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ w punkcie $A(x_0, -9)$.</p> <p><u>Zadanie 5.</u> Wyznacz ekstrema lokalne funkcji</p> <p>$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 3}$.</p>	<p><u>Zadanie 5.</u> Wyznacz przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji $f(x) = \frac{x^2}{x + 7 - 2x }$.</p> <p><u>Zadanie 6.</u> W pewnym zakładzie produkcyjnym zależność między kosztem całkowitym produkcji K a jej wielkością x wyraża się wzorem $K(x) = x^3 + 500x + 16\,000$. Przy jakiej wielkości produkcji koszt przypadający na jednostkę wytworzonego produktu jest najmniejszy?</p>	
--	---	--

3. Geometria analityczna

Tematyka zajęć:

- Wektor w układzie współrzędnych. Współrzędne środka odcinka
- Kąt między niezerowymi wektorami
- Równanie kierunkowe prostej
- Równanie ogólne prostej
- Kąt między prostymi
- Odległość punktu od prostej. Odległość między dwiema prostymi równoległymi
- Pole trójkąta. Pole wielokąta
- Równanie okręgu. Nierówność opisująca koło
- Wzajemne położenie prostej i okręgu. Styczna do okręgu
- Wzajemne położenie dwóch okręgów
- Jednokładność. Jednokładność w układzie współrzędnych
- Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązaniach zadań z geometrii analitycznej

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> – stosuje informacje zdobyte w klasie pierwszej, dotyczące wektora w układzie współrzędnych, w rozwiązywaniu zadań; – potrafi wyznaczyć współrzędne środka odcinka; – potrafi obliczyć długość odcinka, znając współrzędne jego końców; – zna definicję kąta utworzonego przez dwa niezerowe wektory; – zna i potrafi stosować w zadaniach wzory na cosinus i sinus kąta utworzonego przez dwa niezerowe wektory; – zna warunki na prostopadłość i równoległość wektorów i potrafi je zastosować w zadaniach; – zna definicję równania kierunkowego prostej oraz znaczenie współczynników występujących w tym równaniu; – potrafi napisać równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez dwa dane punkty oraz równanie kierunkowe prostej, znając jej kąt nachylenia do osi OX i współrzędne punktu, który do należy tej prostej; – zna definicję równania ogólnego prostej; – potrafi napisać równanie ogólne prostej przechodzącej przez dwa punkty; – zna i potrafi stosować w zadaniach warunek na równoległość oraz prostopadłość prostych danych równaniami kierunkowymi (ogólnymi); 	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> – rozwiązuje zadania, dotyczące wektorów, w których występują parametry; – rozwiązuje zadania z geometrii analitycznej (o średnim stopniu trudności), w rozwiązaniach których sprawnie korzysta z poznanych wzorów; – potrafi rozwiązywać różne zadania dotyczące okręgów i kół w układzie współrzędnych, w których konieczne jest zastosowanie wiadomości z różnych działów matematyki; – potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące okręgów i kół w układzie współrzędnych.; – stosuje rachunek pochodnych w rozwiązaniach zadań z geometrii analitycznej. 	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> – potrafi wyprowadzić wzory na sinus i cosinus kąta utworzonego przez dwa niezerowe wektory; – potrafi wyprowadzić wzory na tangens kąta utworzonego przez dwie proste dane równaniami kierunkowym (ogólnymi); – potrafi wyprowadzić wzór na odległość punktu od prostej; – potrafi rozwiązywać zadania z geometrii analitycznej o podwyższonym stopniu trudności .

<ul style="list-style-type: none"> – potrafi obliczyć (korzystając z poznanych wzorów) miarę kąta, jaki tworzą dwie proste przecinające się; – zna i potrafi stosować w zadaniach, wzór na odległość punktu od prostej; – potrafi obliczyć odległość między dwiema prostymi równoległymi: – potrafi obliczyć pole trójkąta oraz dowolnego wielokąta, gdy dane są współrzędne jego wierzchołków; – rozpoznaje równanie okręgu w postaci zredukowanej oraz w postaci kanonicznej; – potrafi sprowadzić równanie okręgu z postaci zredukowanej do postaci kanonicznej (i odwrotnie); – potrafi odczytać z równania okręgu współrzędne środka i promień okręgu; – potrafi napisać równanie okręgu, gdy zna współrzędne środka i promień tego okręgu; – rozpoznaje nierówność opisującą koło; – potrafi odczytać z nierówności opisującej koło współrzędne środka i promień tego koła; – potrafi napisać nierówność opisującą koło w sytuacji, gdy zna współrzędne środka i promień koła; – potrafi narysować w układzie współrzędnych okrąg na podstawie danego równania opisującego okrąg; – potrafi narysować w układzie współrzędnych koło na podstawie danej nierówności opisującej 		
--	--	--

<p>koło;</p> <ul style="list-style-type: none"> – potrafi określić wzajemne położenie prostej o danym równaniu względem okręgu o danym równaniu (po wykonaniu stosownych obliczeń); – potrafi określić wzajemne położenie dwóch okręgów danych równaniami (na podstawie stosownych obliczeń); – potrafi obliczyć współrzędne punktów wspólnych prostej i okręgu lub stwierdzić, że prosta i okrąg nie mają punktów wspólnych; – potrafi obliczyć współrzędne punktów wspólnych dwóch okręgów (lub stwierdzić, że okręgi nie przecinają się), gdy znane są równania tych okręgów; – potrafi wyznaczyć równanie stycznej do okręgu; – potrafi napisać równanie okręgu opisanego na trójkącie, gdy dane ma współrzędne wierzchołków trójkąta; – potrafi rozwiązywać proste zadania z wykorzystaniem wiadomości o prostych, trójkątach, parabolach i okręgach; – zna pojęcie jednokładności o środku S i skali $k \neq 0$ (także w ujęciu analitycznym); – zna własności figur jednokładnych; – potrafi rozwiązywać proste zadania z zastosowaniem jednokładności. 		
--	--	--

Przykładowe zadania

Zadanie 1.

Oblicz sumę sinusów kątów wewnętrznych trójkąta o wierzchołkach $A(1, -4)$, $B(6, 3)$, $C(2, 5)$.

Zadanie 2.

Prosta k jest nachylona do osi OX pod kątem $\alpha = 60^\circ$ i przechodzi przez punkt $A(5, 3)$. Napisz równanie ogólne i kierunkowe tej prostej.

Zadanie 3.

Dany jest czworokąt $ABCD$, gdzie $A(2, 1)$, $B(6, -2)$, $C(4, 3)$, $D(0, 8)$.

- a) Oblicz pole tego czworokąta.
- b) Oblicz odległość wierzchołka B od boku AD .
- c) Oblicz miarę kąta ostrego, jaki tworzą przekątne tego czworokąta (wynik podaj z dokładnością do 1°).

Zadanie 4.

Dany jest trójkąt ABC , gdzie $A(1, 5)$, $B(8, -2)$, $C(9, 1)$.

- a) Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$, który jest obrazem trójkąta ABC w jednokładności o środku $S(1, 3)$ i skali $k = -2$.
- b) Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie $A'B'C'$.

Zadanie 1.

Dane są wektory $\vec{u} = [-5, 3]$, $\vec{v} = [2, -1]$, $\vec{b} = [1, 4]$. Wykaż, że jeśli wektory $\vec{u} + a \cdot \vec{v}$ oraz \vec{b} są prostopadłe, to $a = 3,5$.

Zadanie 2.

Wyznacz równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P(-5, 16)$, która tworzy z osią odciętych kąt o mierze dwa razy większej od kąta, jaki tworzy z tą osią prosta k o równaniu $y = \frac{2}{3}x - 1$.

Zadanie 3.

Wyznacz równanie zbioru środków wszystkich okręgów stycznych do prostej $k: y = 0$ i jednocześnie stycznych zewnętrznie do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 4x$.

Zadanie 4.

Dla jakich wartości parametru m ($m \in \mathbf{R}$) okręgi opisane równaniami $\sigma_1: (x - m)^2 + (y + 2)^2 = 20$ oraz $\sigma_2: (x + 1)^2 + (y - 2m)^2 = 5$ są wewnętrznie styczne? Dla znalezionych wartości parametrów wykonaj rysunek. Oblicz współrzędne punktu styczności.

Zadanie 5.

Wykres funkcji $y = |x - 2|$ przecina okrąg

Zadanie 1.

Przez punkt $A = (0, 1)$ poprowadzono styczną do okręgu $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$. Znajdź równanie krzywej, którą tworzą środki wszystkich cięciw danego okręgu wyznaczonych przez proste przechodzące przez punkt A .

Zadanie 5.

Określ wzajemne położenie prostej $k: y = \frac{1}{2}x$ względem okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

Zadanie 6.

Napisz równania stycznych do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ przechodzących przez punkt $A(-4, 3)$.

o równaniu $x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$ w punktach A i B .

a) Oblicz współrzędne punktów A i B .

b) Wykaż, że trójkąt ABC , gdzie S jest środkiem okręgu, jest prostokątny.

c) Oblicz pole figury $F = F_1 \cap F_2$, gdzie

$$F_1 = \{(x, y): x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge x^2 + y^2 - 4x - 4 \leq 0\},$$

$$F_2 = \{(x, y): x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R} \wedge y \leq |x - 2|\}.$$

Zadanie 6.

Na gałęzi hiperboli o równaniu $f(x) = \frac{4}{x}$, gdzie

$x \in (0, +\infty)$, wyznacz współrzędne takiego punktu P , którego odległość od punktu $A(-3, 3)$ jest najmniejsza.

4. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

Tematyka zajęć:

- Reguła mnożenia i reguła dodawania
- Wariacje
- Permutacje
- Kombinacje
- Kombinatoryka – zadania różne
- Doświadczenie losowe
- Zdarzenia. Działania na zdarzeniach
- Określenie prawdopodobieństwa
- Prawdopodobieństwo klasyczne
- Doświadczenia losowe wieloetapowe
- Prawdopodobieństwo warunkowe
- Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym
- Niezależność zdarzeń

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> – zna regułę dodawania oraz regułę mnożenia; – zna pojęcie permutacji zbioru i umie stosować wzór na liczbę permutacji; – zna pojęcie wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń i umie stosować wzory na liczbę takich wariacji; – zna pojęcie kombinacji i umie stosować wzór na liczbę kombinacji; – umie rozwiązywać proste zadania kombinatoryczne z zastosowaniem poznanych wzorów; – zna terminy: doświadczenie losowe, zdarzenie elementarne, przestrzeń zdarzeń elementarnych, zdarzenie, zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe, zdarzenia wykluczające się; – potrafi określić zbiór wszystkich zdarzeń danego doświadczenia losowego, obliczyć jego moc oraz obliczyć liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających danemu zdarzeniu; – potrafi stosować klasyczną definicję prawdopodobieństwa w rozwiązaniach zadań; – zna i rozumie aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa; – zna własności prawdopodobieństwa i umie je stosować w rozwiązaniach prostych zadań; – rozwiązuje zadania za pomocą drzewa stochastycznego; 	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> – umie rozwiązywać zadania kombinatoryczne o średnim stopniu trudności; – umie udowodnić własności prawdopodobieństwa; – umie stosować własności prawdopodobieństwa do rozwiązywania zadań „teoretycznych”; – zna i potrafi stosować wzór Bayesa; – wie i rozumie na czym polega niezależność n zdarzeń ($n \geq 2$). 	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> – potrafi udowodnić, że prawdopodobieństwo warunkowe spełnia warunki aksjomatycznej definicji prawdopodobieństwa; – potrafi udowodnić wzór na prawdopodobieństwo całkowite; – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania dotyczące kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa.

<ul style="list-style-type: none"> – zna określenie prawdopodobieństwa warunkowego i umie rozwiązywać proste zadania dotyczące takiego prawdopodobieństwa; – zna wzór na prawdopodobieństwo całkowite i potrafi go stosować w rozwiązaniach prostych zadań; – wie, jakie zdarzenia nazywamy niezależnymi; potrafi zbadać, posługując się definicją, czy dwa zdarzenia są niezależne; – potrafi rozwiązywać proste zadania dotyczące niezależności zdarzeń. 		
<p>Przykładowe zadania</p>		
<p><u>Zadanie 1.</u> a) Ile jest liczb sześciocyfrowych, w których suma cyfr jest równa 4? b) Ile różnych kodów można otrzymać, przedstawiając litery wyrazu KATASTROFA.</p> <p><u>Zadanie 2.</u> Z grupy 6 kobiet i 8 mężczyzn wybieramy losowo cztery osoby. Ile jest takich sposobów wyboru, aby wśród wybranych osób: a) były same kobiety, b) były dwie kobiety i dwóch mężczyzn?</p> <p><u>Zadanie 3.</u> Sześćcian pomalowano, a następnie rozcięto na</p>	<p><u>Zadanie 1.</u> W przedziale wagonu kolejowego są ustawione naprzeciw siebie dwie ławki. Każda ma 5 numerowanych miejsc. Do przedziału weszło pięć osób. Trzy osoby siadły na jednej ławce, pozostałe – na drugiej, naprzeciwko dwóch osób z pierwszej ławki. Ile jest takich rozmieszczeń osób w przedziale?</p> <p><u>Zadanie 2.</u> Ile jest funkcji ściśle monotonicznych przekształcających zbiór k – elementowy w zbiór n – elementowy ($k \leq n$)?</p>	<p><u>Zadanie 1.</u> Ile rozwiązań ma równanie $x + y + z + t = 25$ a) w zbiorze liczb naturalnych dodatnich; b) w zbiorze liczb naturalnych?</p>

<p>1000 jednakowych sześcianików, które wrzucono do pudełka i wymieszano. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania z tego pudełka jednego sześcianika, który:</p> <p>a) będzie miał dwie ściany pomalowane, b) będzie miał jedną ścianę lub dwie ściany pomalowane.</p> <p><u>Zadanie 4.</u> Na stu mężczyzn – pięciu, a na tysiąc kobiet – dwie, to daltoniści. Z grupy, w której stosunek liczby kobiet do liczby mężczyzn wynosi 3 : 7, wylosowano jedną osobę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to daltonista?</p> <p><u>Zadanie 5.</u> Rzucamy dwiema kostkami do gry. Czy niezależne są następujące zdarzenia: A – na obu kostkach wypadła nieparzysta liczba oczek, B – na drugiej kostce wypadła liczba oczek podzielna przez trzy?</p>	<p><u>Zadanie 3.</u> Wykaż, że jeśli $P(A) = 0,25$ i $P(B) = \frac{1}{3}$, to</p> $\frac{1}{3} \leq P(A \cup B) \leq \frac{7}{12} \text{ oraz } P(A \cap B) \leq \frac{1}{4}.$ <p><u>Zadanie 4.</u> Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, \dots, 18, 19, 20\}$ losujemy trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma tych liczb jest podzielna przez 3, jeśli wiadomo, że co najmniej jedna z tych liczb przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.</p> <p><u>Zadanie 5.</u> Do sklepu dostarczają żarówki energooszczędne dwa zakłady, będące częściami tej samej firmy, przy czym pierwszy z nich dostarcza trzy razy więcej żarówek niż drugi. W pierwszym z tych zakładów mają wady średnio 3 żarówki na 1000 wyprodukowanych, a w drugim 7 na 1000 wyprodukowanych. Klient kupił żarówkę, na której widniał tylko znak firmy, a nie zakładu, który ją wyprodukował. Żarówka ta w okresie gwarancji zepsuła się. Do którego zakładu sklep raczej powinien się zwrócić z reklamacją?</p>	
---	--	--

5. Elementy statystyki opisowej.

Tematyka zajęć:

- Podstawowe pojęcia statystyki. Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej
- Średnia z próby
- Mediana z próby i moda z próby
- Wariancja i odchylenie standardowe

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> – zna podstawowe pojęcia statystyki opisowej: obserwacja statystyczna, populacja generalna, próba, liczebność próby, cecha statystyczna (mierzalna, niemierzalna) itp.; – potrafi odczytywać dane statystyczne z tabel, diagramów i wykresów oraz interpretować te dane; – potrafi określać zależności między odczytanymi danymi; – potrafi przedstawiać dane empiryczne w postaci tabel, diagramów i wykresów; – potrafi obliczać średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe z próby; – potrafi interpretować wymienione wyżej parametry statystyczne. 	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> – potrafi rozwiązywać zadania ze statystyki opisowej o średnim stopniu trudności. 	

Przykładowe zadania

<p>Zadanie 1. Pięćdziesiąt osób zdawało egzamin z przepisów ruchu drogowego. Liczba popełnionych przez nie błędów przedstawiona jest w poniższej tabeli:</p> <table border="1"> <tr> <td>Liczba błędów</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>Liczba osób</td> <td>11</td> <td>8</td> <td>14</td> <td>7</td> <td>6</td> <td>4</td> </tr> </table>	Liczba błędów	0	1	2	3	4	5	Liczba osób	11	8	14	7	6	4	<p>Zadanie 1. W klasie IIIa liczącej 28 osób z ostatniego sprawdzianu z matematyki było 13 ocen dopuszczających, a pozostałe oceny to dostateczne i dobre. Średnia ocen ze sprawdzianu wyniosła 2,75. Oblicz:</p> <p>a) liczbę ocen dobrych i dostatecznych ze sprawdzianu;</p>	
Liczba błędów	0	1	2	3	4	5										
Liczba osób	11	8	14	7	6	4										

<p>a) Oblicz średnią liczbę błędów popełnionych przez zdającego.</p> <p>b) Ile procent zdających zdało egzamin, jeśli można było popełnić co najwyżej dwa błędy?</p> <p>c) Przedstaw dane na diagramie kolumnowym i zaznacz na nim średnią obliczoną w punkcie a).</p> <p><u>Zadanie 2.</u> Wyznacz modę i medianę zestawu danych: 3, 2, 2, 5, 4, 5, 1, 2, 6, 8.</p> <p><u>Zadanie 3.</u> Producent czekolady deklaruje, że tabliczka ma wagę $150 \text{ g} \pm 2 \text{ g}$. Dla zbadania jakości pewnej partii czekolady organizacja konsumencka zbadała wagę losowo wybranych 10 tabliczek czekolady z tej partii i otrzymała następującą ich wagę (w gramach): 150,4 148,9 150,1 152,8 146,6 154,3 150,8 151,1 150,6 149,5 Oblicz średnią wagę tabliczki czekolady i odchylenie standardowe w badanej próbie. Zastanów się, czy organizacja konsumencka powinna zwrócić się do producenta z reklamacją dotyczącą tej partii tabliczek czekolady.</p>	<p>b) odchylenie standardowe od średniej ocen; wynik podaj z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.</p> <p><u>Zadanie 2.</u> Wiadomo, że wariancję zestawu danych x_1, x_2, \dots, x_n możemy obliczyć ze wzoru:</p> $(1) \sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$ <p>lub ze wzoru</p> $(2) \sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2,$ <p>gdzie \bar{x} jest średnią arytmetyczną liczb x_1, x_2, \dots, x_n. Wykaż, że wzory (1) i (2) są równoważne.</p>	
--	---	--

6. Geometria przestrzenna

Tematyka zajęć:

- Płaszczyzny i proste w przestrzeni
- Rzut równoległy na płaszczyznę. Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę
- Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni
- Rzut prostokątny na płaszczyznę
- Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych
- Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny
- Graniastopy
- Ostrosłupy
- Siatka wielościanu. Pole powierzchni wielościanu
- Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów
- Przekroje wielościanów. Konstrukcje
- Przekroje wielościanów – zadania
- Bryły obrotowe. Pole powierzchni brył obrotowych
- Objętość brył obrotowych
- Zastosowanie analizy matematycznej w rozwiązywaniu zadań z geometrii przestrzennej

Wymagania podstawowe	Wymagania dopełniające	Wymagania wykraczające
<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> – potrafi określić położenie dwóch płaszczyzn w przestrzeni; – potrafi określić położenie prostej i płaszczyzny w przestrzeni; – potrafi określić położenie dwóch prostych w przestrzeni; – rysuje figury płaskie w rzucie równoległym na płaszczyznę; – umie scharakteryzować prostopadłość prostej i płaszczyzny; – umie scharakteryzować prostopadłość dwóch płaszczyzn; – rozumie pojęcie odległości punktu od płaszczyzny oraz odległości prostej równoległej do płaszczyzny od tej płaszczyzny; – zna i potrafi stosować twierdzenie o trzech prostych prostopadłych; – rozumie pojęcie kąta między prostą i płaszczyzną; – rozumie pojęcie kąta dwuściennego, poprawnie posługuje się terminem “kąt liniowy kąta dwuściennego”; – zna określenie graniastosłupa; umie wskazać: podstawy, ściany boczne, krawędzie podstaw, krawędzie boczne, wysokość graniastosłupa; – zna podział graniastosłupów; – umie narysować siatki graniastosłupów prostych; – zna określenie ostrosłupa; umie wskazać: 	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> – potrafi wyznaczać przekroje wielościanów; – określa, jaką figurą jest dany przekrój sfery płaszczyzną; – potrafi obliczyć pole powierzchni przekroju bryły daną płaszczyzną (graniastosłupa, ostrosłupa, walca, stożka, kuli); – potrafi rozwiązywać zadania, w których jedna bryła jest wpisana w drugą lub opisana na niej (ostrosłup wpisany w kulę; kula wpisana w stożek, ostrosłup opisany na kuli, walec wpisany w stożek itp.); – potrafi stosować twierdzenie o objętości brył podobnych w rozwiązaniach prostych zadań; – potrafi rozwiązywać zadania geometryczne dotyczące brył o średnim stopniu trudności, z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń z planimetrii oraz trygonometrii; – wykorzystuje wiadomości z analizy matematycznej w rozwiązaniach zadań ze stereometrii. 	<p>Uczeń:</p> <ul style="list-style-type: none"> – potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne dotyczące brył, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń.

<p>podstawę, ściany boczne, krawędzie podstaw, krawędzie boczne, wysokość ostrosłupa;</p> <ul style="list-style-type: none"> – zna podział ostrosłupów; – umie narysować siatki ostrosłupów prostych; – potrafi rozpoznać w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi itp.) oraz obliczyć miary tych kątów; – potrafi rozpoznać w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami (kąty między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami) oraz obliczyć miary tych kątów; – potrafi rozpoznać w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między ścianami oraz obliczyć miarę tego kąta; – zna określenie walca; umie wskazać: podstawy, powierzchnię boczną, tworzącą, oś obrotu walca; – rozumie określenie “przekrój osiowy walca”; – zna określenie stożka; umie wskazać: podstawę, powierzchnię boczną, tworzącą, wysokość, oś obrotu stożka; – rozpoznaje w walcach i stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą) oraz oblicza miary tych kątów; – zna określenie kuli; – rozumie pojęcie objętości bryły; – umie obliczyć objętość i pole powierzchni 		
--	--	--

<p>poznanych graniastosłupów; – umie obliczyć objętość i pole powierzchni poznanych ostrosłupów; – umie obliczyć objętość i pole powierzchni brył obrotowych (stożka, kuli, walca); – potrafi rozwiązywać proste zadania geometryczne dotyczące brył, w tym z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych wcześniej twierdzeń z geometrii płaskiej.</p>		
---	--	--

Przykładowe zadania

<p><u>Zadanie 1.</u> Przez punkty A, B leżące poza płaszczyzną π, poprowadzono proste prostopadłe do tej płaszczyzny przebijające ją odpowiednio w punktach A' i B'. Wiedząc, że $AA' = 80$ cm, $BB' = 60$ cm, oblicz odległość środka odcinka AB od płaszczyzny π.</p> <p><u>Zadanie 2.</u> Podstawą graniastosłupa prostego jest równoległobok, którego pole wynosi 16 cm², a kąt ostry ma miarę $\frac{\pi}{6}$. Pola ścian bocznych tego graniastosłupa są równe odpowiednio 24 cm² i 48 cm². Oblicz objętość graniastosłupa.</p> <p><u>Zadanie 3.</u> Wysokość czworościanu foremego ma długość H.</p>	<p><u>Zadanie 1.</u> Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o polu równym 1 m². Dwie ściany boczne są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, a dwie pozostałe tworzą z nią kąty o miarach odpowiednio 30° i 60°. Oblicz objętość ostrosłupa.</p> <p><u>Zadanie 2.</u> Długość krawędzi sześciianu jest równa 10 cm. Sześciian ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz pole otrzymanego przekroju.</p> <p><u>Zadanie 3.</u> W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt płaski przy wierzchołku ściany bocznej ma miarę α, zaś kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami</p>	<p><u>Zadanie 1.</u> Przez końce trzech krawędzi równoległościanu schodzących się w jednym wierzchołku poprowadzono płaszczyznę. Udowodnij, że dzieli ona w stosunku $1 : 2$ przekątną równoległościanu wychodzącą z tego samego wierzchołka.</p>
--	--	---

<p>Oblicz długość krawędzi tego czworościanu.</p> <p><u>Zadanie 4.</u> Trapez prostokątny obraca się wokół boku tworzącego z podstawami kąty proste. Podstawy trapezu mają długość odpowiednio 10 cm i 7 cm. Pole trapezu wynosi 68 cm². Oblicz objętość otrzymanej bryły obrotowej.</p>	<p>bocznymi ma miarę β.</p> <p>Wykaż, że $\cos \beta = \frac{\cos \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$.</p> <p><u>Zadanie 4.</u> Na kuli o promieniu R opisano stożek obrotowy o najmniejszej objętości. Oblicz stosunek objętości tego stożka do objętości kuli.</p>	
--	--	--